

工程信号处理中离散傅里叶变换的误差

赵晓丹, 冯 霞

(江苏大学 汽车与交通工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 离散傅里叶变换(DFT)的误差一般是通过窗函数的卷积来解释的. 作者从内积运算诊断相关信号的观点, 分析了 DFT误差的原因, 给出了误差公式, 指出基向量和被分析信号的向量不吻合是造成内积运算诊断相关信号误差的根本原因. 通过计算例子分析了 DFT方法的误差特性: DFT分析结果在分析时间 T 内插值细分, 或延拓出分析时间 T 以外者时, 存在误差; DFT分析结果会出现一定的随机性; DFT在快速逼近信号方面效率不高. 分析时间长度 T 对 DFT分析的误差有影响: 增加 T 可以消减旁瓣误差, 但是不能消减泄露误差.

关键词: 信号处理; 离散傅里叶变换; 内积; 泄露误差; 旁瓣误差

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-7775(2006)02-0136-04

Characterizing discrete Fourier transform errors in signal processing by inner product

ZHAO Xiao-dan, FENG Xia

(School of Automobile and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

Abstract Convolution of windowing function is traditionally used to explain the Discrete Fourier Transform (DFT) errors. In this work, the inner product of diagnosing correlation signals was used, and the equations of amplitude and phase errors were formulated. It is seen that the errors exist if the base vectors and the vectors of the analyzed signals are not in step. The example results show that errors occur when the DFT output is interpolated within the analyzing time T or when it is obtained beyond the time T . The DFT output may be random to a certain extent. The errors usually reduce the efficiency of convergence in the signal approximation. The analyzing time T has a large effect on the DFT analysis: increasing time T reduces the lobe errors, but may not reduce the leakage errors.

Key words signal processing; discrete Fourier transform; inner product; lobe error; leakage error

傅里叶变换已经形成一个变换家族^[1], 常见的有连续傅里叶变换(FT), 离散时间傅里叶变换(DTFT)和离散傅里叶变换(DFT)等等. 其中 DFT 最为人们熟知, 它在时域和频域都是离散的并且为有限项, 这使得 DFT 可以通过计算机计算实现, 因此 DFT 是傅里叶级数变换家族中最具实用意义的. 它在机械工程、通讯工程、电学等诸多领域被广泛应用, 是现代科学和工程中不可或缺的分析技术.

但是 DFT 存在大的误差, 甚至会带来错误的结果^[2-4]. 对 DFT 误差的研究一直没有间断^[2-6], DFT 误差的主要来源是泄露误差, 有文献主要从函数截断以及截断函数和被分析函数卷积关系的角度进行研究^[3,7,8]. 作者从内积运算诊断相似信号的角度出发研究 DFT 误差, 以了解 DFT 分析的误差特性, 认识 DFT 误差的根源, 为消减 DFT 分析误差提供认知基础.

收稿日期: 2005-09-26

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(02KJB470002)

作者简介: 赵晓丹(1963-), 男, 江苏镇江人, 副教授(zhaoxiaodan@126.com), 主要从事振动噪声控制的研究.

冯霞(1980-), 女, 江苏泰兴人, 硕士研究生(jdfengxia@126.com), 主要从事振动噪声控制的研究.

1 DFT 诊断相关信号的理论分析

文中采用规格化定义函数内积和向量内积

$$\langle x(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) g^*(t) dt \quad (1)$$

$$\langle x(i), g(i) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i g_i^* \quad (2)$$

其中 $x(t)$ 和 $g(t)$ 表示函数, $t \in [a, b]$; 向量 $x(i) = (x_0, x_1, \dots, x_{(N-1)})$, $g(i) = (g_0, g_1, \dots, g_{(N-1)})$, $*$ 表示取共轭. 对应规格化内积定义的 DFT 公式

$$X(k) = \langle x(i), w_k(i) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j \frac{2\pi}{N} k i} \quad (3)$$

逆变换 (IDFT) 公式是

$$x_i = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k i} \quad (4)$$

式 (3) 是频率归一化的 DFT 形式, 下面取直观的表示形式. 不失一般性, 假设存在一物理信号, 它由多个频率的三角函数信号组合而成:

$$x(t) = \sum_{i=1}^m A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{A_i}{2} e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} + \frac{A_i}{2} e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} \right) \quad (5)$$

其中 A_i 和 φ_i 是信号的幅值和相位, ω_i 是角频率, m 是一有限正整数. 对 $x(t)$ 进行采样, 采样频率是 f_s (满足采样定理), 采样点数是 N , 采样的时间长度是 T , 采样的时间间隔是 Δt 有 $N = T/\Delta t$ 和 $f_s \Delta t = 1$, 代入式 (3) 进行变换得

$$X(k) = \frac{\Delta t}{T} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) e^{-j 2\pi k \frac{f_s}{N} \Delta t i} \quad (6)$$

变换后, 式 (6) 的物理意义更明显. 其中 $(\Delta t, i)$ 表示时间历程, $\bar{f}_k = (k f_s / N)$ 是基向量的频率. DFT 将采样频率等间隔地划分 N 份, 构成标准正交基底

$$\{w\} = \{w_0, w_1, \dots, w_{(N-1)}\}, \text{ 其中, 基向量 } w_k = \left[1, e^{j \frac{2\pi}{N} k}, e^{j \frac{2\pi}{N} k 2\Delta t}, \dots, e^{j \frac{2\pi}{N} k (N-1)\Delta t} \right] \quad (7)$$

内积运算是一种诊断相关 (相似) 信号的运算. DFT 的实质是用这些基向量和被分析信号做内积运算, 从被分析信号中诊断出与基向量相似的信息. DFT 的基 (正交基) 有一个良好的性质即正交性, 各基向量之间的内积为零, 保证了各基向量之间没有干扰. 但当被分析信号 $x(t)$ 中存在 $f_i \neq \bar{f}_k$ 时, 误差就要发生. 假设基函数的频率值是 $\tilde{\omega}$, 考察用基函数 $e^{j\tilde{\omega}t}$ 作内积运算诊断某一单频信号

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \varphi)} \quad (8)$$

作内积运算

$$X_1(\tilde{\omega}) = \langle x_1(t), e^{j\tilde{\omega}t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{A e^{j\varphi}}{2} e^{j(\omega - \tilde{\omega})t} + \frac{A e^{j\varphi}}{2} e^{-j(\omega + \tilde{\omega})t} \right) dt \quad (9)$$

考虑 $\tilde{\omega}, \omega > 0$ 当 $T \rightarrow +\infty$ 时, 上式的后一项积分趋于零. 积分上式的前一项得

$$X_1(\tilde{\omega}) = \frac{A e^{j\varphi}}{2} \frac{\sin((\omega - \tilde{\omega})T/2)}{(\omega - \tilde{\omega})T/2} e^{j(\omega - \tilde{\omega})T/2} \quad (10)$$

从上式可以看出只有当 $\tilde{\omega} = \omega$ 时, 有 $X(\tilde{\omega}) = A e^{j\varphi}/2$ 准确地识别出原信号 $x(t)$. 其他情况下都会有误差. 幅值的误差用相对值表示

$$EA = \frac{|X_1(k)|}{A/2} = \left| \frac{\sin((\omega - \tilde{\omega})T/2)}{(\omega - \tilde{\omega})T/2} \right| \quad (11)$$

相位误差

$$\Delta\theta = \begin{cases} (\omega - \tilde{\omega})T/2 & \sin c((\omega - \tilde{\omega})T/2) > 0 \\ \pi + (\omega - \tilde{\omega})T/2 & \sin c((\omega - \tilde{\omega})T/2) < 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中函数 $\sin c(x) = \sin(x)/x$. 由误差公式可以看出: 当 T 比较大时, 即使 $(\omega - \tilde{\omega})$ 是一个小的量值, 误差 EA 和 $\Delta\theta$ 都可能比较大.

对于包含多个频率成分的信号, 还会有其他频率信号的干扰误差. 为了区分这两种误差, 作下面的说明: 设信号中存在某一频率成分为 ω 的信号, 事先并不知道 ω 的确切数值, 用内积运算试着去诊断这一信号, 称由于基函数与被分析信号函数不吻合 (及 $\tilde{\omega} \neq \omega$) 造成的误差为“泄露误差”; 称基函数与被分析信号函数吻合 ($\tilde{\omega} = \omega$) 以后, 受到其他信号的干扰造成的误差为“其他信号旁瓣干扰误差”, 简称“旁瓣误差”. 注意到式 (10) 中的 $\tilde{\omega}$ 和 ω 是符合采样定理的任意数值, 泄露误差和旁瓣误差虽然定义不同, 但是都可以用式 (10) 进行分析.

当 DFT 的基向量与被分析信号向量的频率不吻合时, DFT 方法会产生下面的一些具体问题.

2 DFT 分析工程信号的误差特性

2.1 不具有延拓性和插值细分性

在 $[0, T]$ 区间, 当被分析信号函数的角频率 ω 不等于函数系中任何基函数的角频率 $2\pi k/T = 2\pi k f_s/N$ 时, 函数 $x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, 是不能够被函数系

$$w(t) = \left\{ 1, e^{\frac{2\pi f}{N}t}, e^{\frac{2\pi f}{N}2t}, \dots, e^{\frac{2\pi f}{N}(N-1)t} \right\}$$

精确表示的. 但是函数被采样以后, 离散的向量 $x_1(i)$ 则可以被基 $w = \{w_0, w_1, \dots, w_{(N-1)}\}$ 精确表示, 任何 N 维的向量都可以被基 w 唯一精确地表示. 这只是在这 N 个采样点, 超过这 N 个采样点, 相等的关系就不再成立. 用一个计算例子观察这种情况. 计算中被分析信号是余弦函数, 频率是 1.58 Hz 零度相位. 采样频率是 10 Hz DFT分析的点数是 $N=10$ 将 DFT诊断出的信号函数作时间上的延拓和细分, 与实际的被分析信号相比 (见图 1, 图 2).

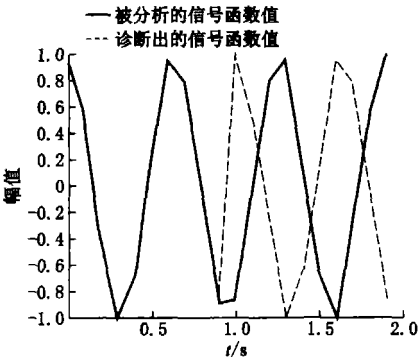


图 1 DFT分析的延拓性

Fig 1 Errors when DFT output is obtained beyond T

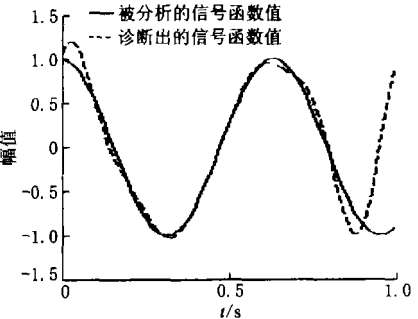


图 2 DFT分析的插值细分性

Fig 2 Errors when DFT output is interpolated within T

从图 1和图 2中可以看出, 由于 $f=1.58$ 与基函数的频率不吻合, 造成 DFT 诊断出的信号函数只在采样点 ($t=0, 0.1, \dots, 0.9$) 与被分析信号相等, 在分析区间的细化点上不吻合. 延拓分析区间后, 计算显示具有比细分更大的误差, 亦如文献 [9] 所述: DFT 分析方法的不足之处是一种强制的周期延拓, 时间延拓以后不能与被分析的实际信号相吻合.

2.2 内积数值的随机性

工程中对于同一个问题, 不同的操作人员会采用不同的 DFT(或 FFT) 分析点数 N 以及取不同数目段的谱平均. 因操作人员不同, 这些参数的采用有很大随机性. 这要造成 DFT 运算的内积时间长度 T 有一定的随机性. 由式 (10) 可以看出, 当 $\tilde{\omega} \neq \omega$ 时,

T 的随机性必然影响到内积运算结果, 造成 $X_1(\tilde{\omega})$ 数值的随机性. 观察一个计算实例:

$$x(t) = 100\cos(2\pi \times 12t) + 100\cos(2\pi \times 39.05t) + 100\cos(2\pi \times 126.5t) + 100\cos(2\pi \times 183.113t) \quad (13)$$

采样频率取 $1\,000\text{ Hz}$ 比较不同分析点数 N 的计算结果.

表 1 是 DFT 计算与理论值的对比: 频率为 12 Hz 的项因为与基向量吻合, 该项没有泄露误差, 在 3 种情况下 DFT 诊断出的幅值和相位数值都是稳定的, 接近真实值. 频率为 126.5 Hz 项也是一个特例, $N=1\,000$ 时, 它刚好在 126 Hz 和 127 Hz 两个基向量之间, 泄露误差最大; N 增加到 $2\,000\text{ Hz}$ 和 $4\,000\text{ Hz}$ 时, 增加了 126.5 Hz 的基向量, 126.5 Hz 项被高精度地诊断出来, 但是同时 126 Hz 上的 DFT 计算结果却接近零, 与 $N=1\,000$ 点的 126 Hz 项 DFT 计算结果不同. 39.05 Hz 和 183.113 Hz 项与基向量不吻合, DFT 计算出的最接近项分别是 39 Hz 和 183 Hz 对于不同的分析点数 N (即不同的 T), 从表 1 中看出 DFT 的计算结果是不同的, 有一定的随机性.

表 1 DFT 计算结果对比

Tab. 1 Comparison of DFT outputs and theoretic results

序号	指标	理论值	DFT 分析结果		
			$N=1\,000$	$N=2\,000$	$N=4\,000$
1	频率 / Hz	12	12	12	12
	幅值	100	100.607	100.392	100.291
	相位 / °	0	0.038	0.018	0.031
2	频率 / Hz	39.05	39	39	39
	幅值	100	100.009	98.545	93.643
	相位 / °	0	9.067	17.965	35.948
3	频率 / Hz	126.5	126	126	126
	幅值	100	63.610	0.195	0.127
	相位 / °	0	89.637	0.408	-2.085
	频率 / Hz			126.5	126.5
	幅值			100.180	100.068
	相位 / °			0.045	0.042
4	频率 / Hz	183.113	183	183	183
	幅值	100	97.909	91.830	69.594
	相位 / °	0	19.943	40.648	81.308

2.3 逼近效率不高

用 DFT 分析去逼近信号时, 除了需要高的精度以外, 还要求用尽可能少的项数, 也就是高的效率, 只有用较少的项数达到高精度逼近才是有工程实际价值的分析. 当 $\tilde{\omega} \neq \omega$ 时, 被分析向量和每一个基向量的内积都不为零, 因此要完全精确表示被分析向量, DFT 方法需要 N 项 (考虑到 DFT 的共轭对称性时项数要减半), N 为奇数时需 $(N+1)/2$ 项. 用拟合残余信号向量的相对值 $E = \|x(i)'\| / \|x(i)\|$

来表示逼近程度, 拟合残余信号向量 $x(i)$ 是指被分析信号 $x(i)$ 向量减去诊断出来的主要项, E 越小表示越接近被分析信号. 仍以式 (13) 为例, 用 $N=4\ 000$ 点的 DFT, 要使 $E<10\%$, 逆计算结果显示需要 28 项; $E<5\%$, 需 102 项. 而实际上式 (13) 中只包含 4 项.

2.4 内积时间长度对误差的影响

内积时间长度 T 是 DFT 分析的重要参量, 有必要讨论它对 DFT 分析的影响.

对于信号 $x(t)$ (见式 (5)), 由式 (11) 可知角频率为 ω_i 的信号对 ω_j 信号造成的旁瓣误差的幅值

$$|X_{ij}| = \frac{A_i}{2} \left| \frac{\sin((\omega_i - \omega_j)T/2)}{(\omega_i - \omega_j)T/2} \right| \quad (14)$$

从上式可以清楚地看出, 旁瓣误差除了与 A_i 有关外, 更重要的是与值 $(\omega_i - \omega_j)T/2$ 有关, 如果 ω_i 和 ω_j 之间的差值本身就比较大, 旁瓣误差也就不大. 如果 $(\omega_i - \omega_j)$ 比较小, 增加 T 数值 $(\omega_i - \omega_j)T/2$ 增大, 可以使旁瓣误差减小, 理论上说 T 足够大时, 旁瓣误差可以被消减到非常低的水平.

对泄露误差来说如果 $(\omega - \tilde{\omega})$ 一定, 则 T 越大, 误差越严重, 式 (10) 清楚地表明了这一点; 但是 T 越大, 如果采样频率不变的话, 则 N 上升, DFT 基向量的数目上升, 频率间隔缩小, 会造成被分析信号频率向新的基向量频率靠近. 例如设采样频率为 $1\ 000\text{ Hz}$ 做 $N=1\ 000$ 点的 DFT 分析, 有信号频率为 86.4 Hz , 86.4 Hz 最靠近频率为 85 Hz 的基, 如改做 $N=2\ 000$ 点的 DFT, 会新增加 86.5 Hz 的基向量, 86.4 Hz 的信号最靠近的不再是 85 Hz 的基, 而是 86.5 Hz 的基, 因此 DFT 泄露误差的大小是由 $(f - \tilde{f})$ 与 DFT 分析的频率间隔 $1/T$ 的比值决定的, 最大泄露误差发生在 $(f - \tilde{f}) = 0.5/T$ 处, 此时对应的 $(\omega - \tilde{\omega})T/2 = \pi/2$. 增加 T 虽然可能使得 $(\omega - \tilde{\omega})$ 减小, 但是同时 T 增加了, 乘积值 $(\omega - \tilde{\omega})T/2$ 未必减小, 因此增加 T 不能够保证泄露误差减小. 从表 1 的计算例子可以看出 N 增加以后, 39.05 Hz 项和 183.113 Hz 项的误差并没有减小, 反而增大了, 其原因正在于 39.05 Hz 项和 183.113 Hz 项的 $(\omega - \tilde{\omega})T/2$ 增大了, 导致泄露误差增加.

3 结 论

DFT 的本质是作内积运算、解相关. 内积运算准确诊断出相关信号的条件是: 基向量必须和被分析信号吻合. DFT 分析等间隔地选取基向量, 实际中难以做到基与被分析信号中的各个信息项都吻合.

DFT 存在旁瓣误差和泄露误差, 其中泄露误差是主要的. 增加 DFT 分析的点数 N (即内积时间长度 T) 可以消减旁瓣误差, 但是不能消减泄露误差.

参考文献 (References)

- [1] Bogges Albert, Narowich Francis J. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002: 37-40.
- [2] Zeng Pan. High accuracy formula for discrete calculation of Fourier transforms [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1999, 106: 117-140.
- [3] 王茂海, 刘会金, 彭辉. 采样信号频率偏离设计值情况下离散傅里叶变换的误差分析 [J]. *电测与仪表*, 2001, 38(1): 13-15.
WANG Mao hai, LIU Hui jia, PENG Hui. Analysis on errors discrete Fourier transform (DFT) in case of signal frequency drifting from designed value [J]. *Electrical Measurement & Instrumentation*, 2001, 38(1): 13-15. (in Chinese)
- [4] 汉泽西, 姚英彪. 用 DFT 分析正弦信号频谱时应注意的几个问题 [J]. *西安石油学院学报: 自然科学版*, 2003, 18(2): 67-70.
HAN Ze xi, YAO Ying biao. Several problems in analyzing sine signal spectrum by DFT [J]. *Journal of Xi'an Petroleum Institute Natural Science*, 2003, 18(2): 67-70. (in Chinese)
- [5] Huang Di shan. Phase error in fast Fourier transform [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1995, 9(2): 113-118.
- [6] Ding Kang, Xie Ming. Phase difference correction method for phase and frequency in spectral analysis [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2000, 14(5): 835-843.
- [7] Ding Kang, Luo Jiang kai, Xie Ming. Time shifting correcting method of phase difference on discrete spectrum [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(7): 819-827.
- [8] 张介秋, 梁昌洪, 陈砚圃. 卷积窗及其在电力系统参量估计中的应用 [J]. *电子学报*, 2004, 32(12): 2012-2015.
ZHANG Jie qiu, LIANG Chang hong, CHEN Yan pu. Convolution window and application in AC electrical parameters estimation [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(12): 2012-2015. (in Chinese)
- [9] 徐伯勋, 白旭滨, 傅孝毅. 信号处理中的数学变换和估计方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 263-264.

(责任编辑 汪再非)