1 -分析过程：

（1）例 1 -1的方法： f (t) → f (t? 2) → f (3t? 2) → f (?3t? 2)

（2）方法二： f (t) → f (3t) → f ?3 ?t? 2/3 ?? → f (?3t? 2)

（3）方法三： f (t) → f (?t) → f ?? (t+2)? → f (?3t? 2)

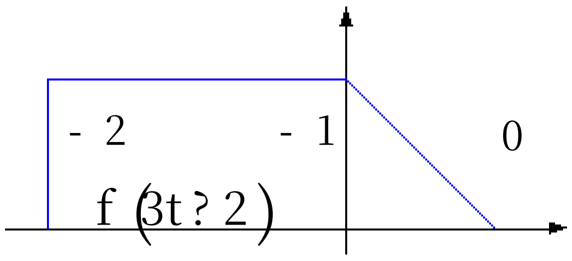
解题过程：

（1）方法一：

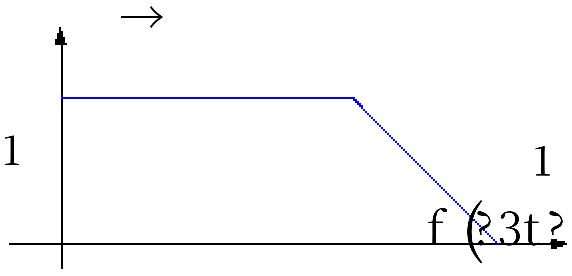
f (t)　　　　f (t? 2)

1　　　　1

→　　　　→



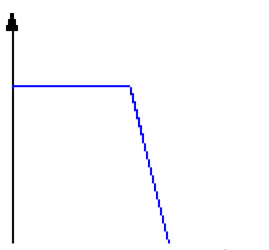
- 2　- 1　0　1



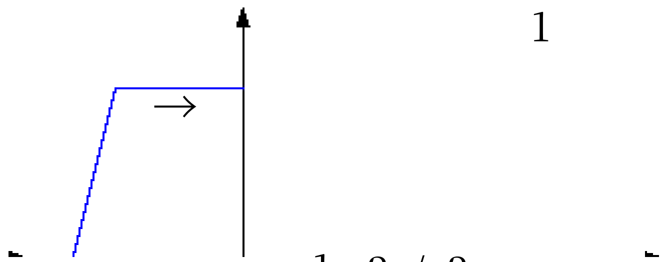
1　2　3

f (3t? 2)　　　　f (?3t? 2)

1



→



2 / 3 1　　　　- 1- 2 / 3

方法二：

f (t)　　　　f (3t)

1　　　　1

→　　　　→

- 2　- 1　0　1　- 2 / 3　1 / 3

f (3t? 2)　　　　f (?3t? 2)

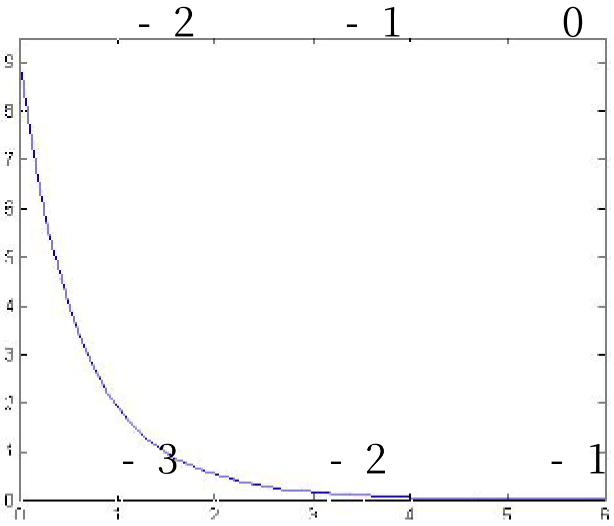
→

2 / 3 1　　　　- 1- 2 / 3

方法三：

$f(t)$　　　　　　　　$f(-t)$

1　　　　　→　　　　　1　　　　　→



-2　-1　0　1　　-1　0　1　2

$f(-t-2)$　　　　　$f(-3t-2)$

1

→

-3　-2　-1　0　　　-1 -2/3

1 -解题过程：

（1）$f(-at)$ 左移 t_0：$f[-a(t+t_0)] = f(-at-at_0) \neq f(t_0-at)$

（2）$f(at)$ 右移 t_0：$f[a(t-t_0)] = f(at-at_0) \neq f(t_0-at)$

（3）$f(at)$ 左移 $\frac{t_0}{a}$：$f\left[a\left(t+\frac{t_0}{a}\right)\right] = f(at+t_0) \neq f(t_0-at)$

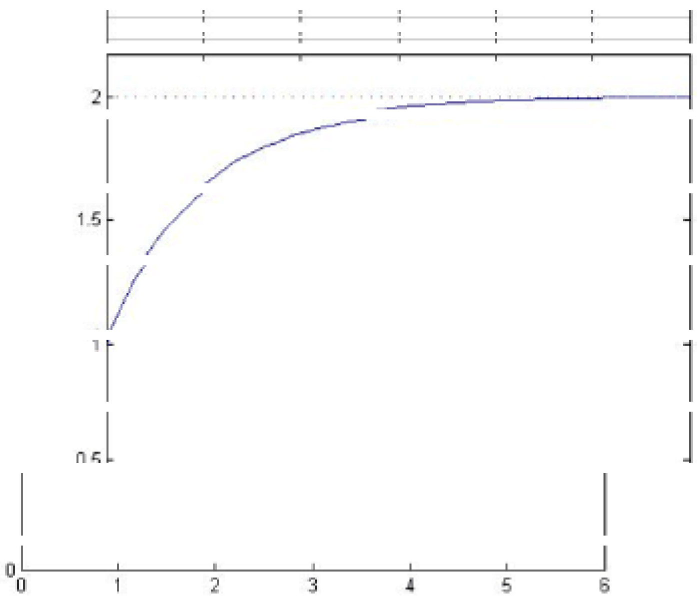
（4）$f(at)$ 右移 $\frac{t_0}{a}$：$f\left[-a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right] = f(-at+t_0) = f(t_0-at)$

故（4）运算可以得到正确结果。

注：1 、41 -题考察信号时域运算：1 -题说明采用不同的运算次序可以得到一致的结果；1 -题提醒所有的运算是针对自变量 t 进行的。如果先进行尺度变换或者反转变换，再进行移位变换，一定要注意移位量和移位的方向。

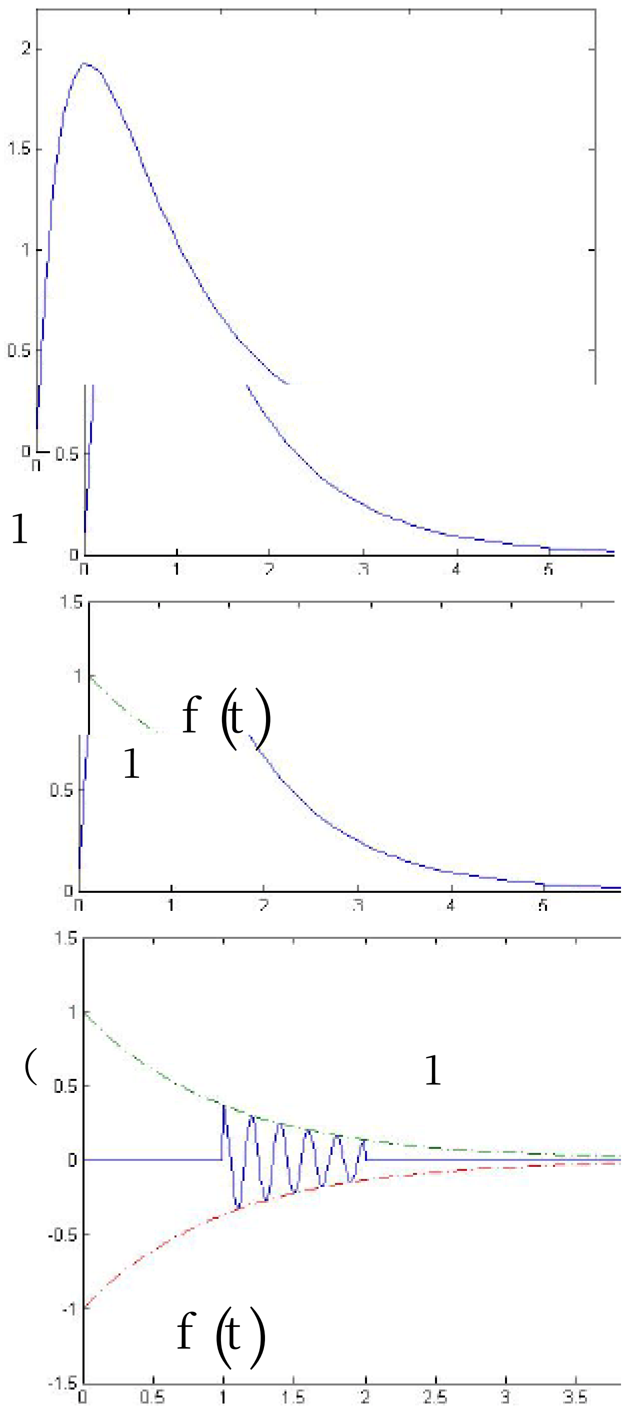
1 -解题过程：

（1）$f(t) = \left(2-e^{-t}\right)u(t)$　　　　（2）$f(t) = \left(3e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$



(3) $f(t) = \left(5e^{-t} - 5e^{-2t}\right)u(t)$

(4) $f(t) = e^{-t}\cos(10\pi t)\left[u(t-1) - u(t-2)\right]$



1

f(t)

1

f(t)

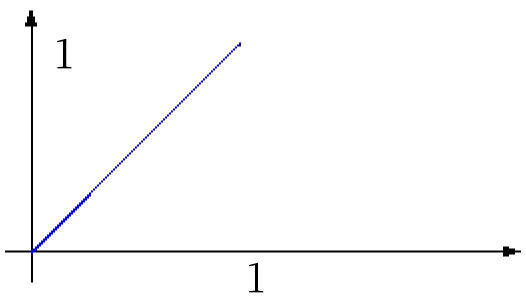
1

(1

(2) 1

f(t)

f(t)



1

1

(3) 1

(4) - 1

f(t)

1

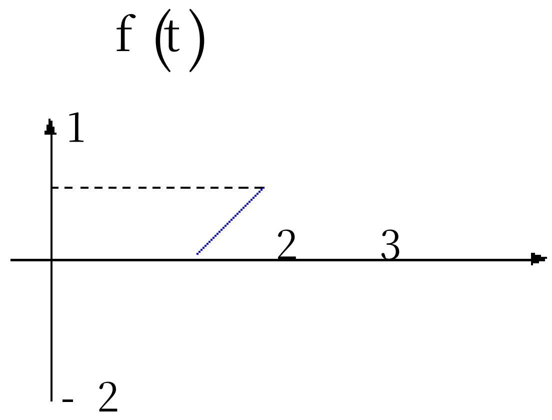
f(t)

3

2

(5) 1

(6) 2 3



(7)

注：1-1～1-9题中的时域信号均为实因果信号，即 $f(t)=f(t)u(t)$

1-10 分析过程：任何信号均可分解为奇分量与偶分量之和的形式，即

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t) \quad \cdots\cdots(1)$$

其中，$f_e(t)$ 为偶分量，$f_o(t)$ 为奇分量，二者性质如下：

$$f_e(t)=f_e(-t) \quad \cdots\cdots(2)$$
$$f_o(t)=-f_o(-t) \quad \cdots\cdots(3)$$

$(1)\sim(3)$ 式联立得

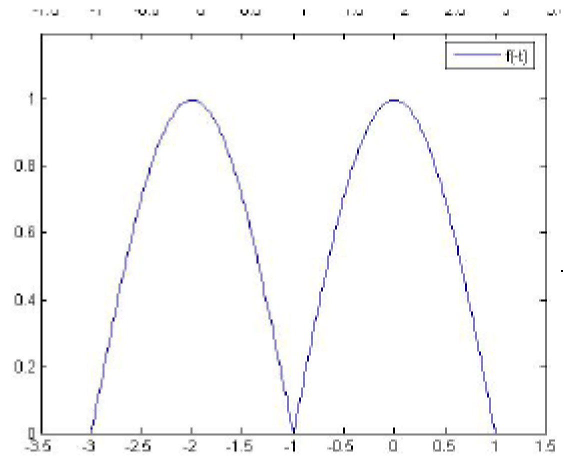
$$f_e(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$$
$$f_o(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$$

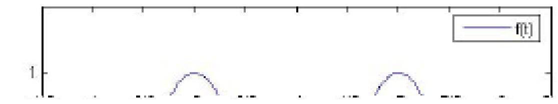
解题过程：

(a-1) (a-2)

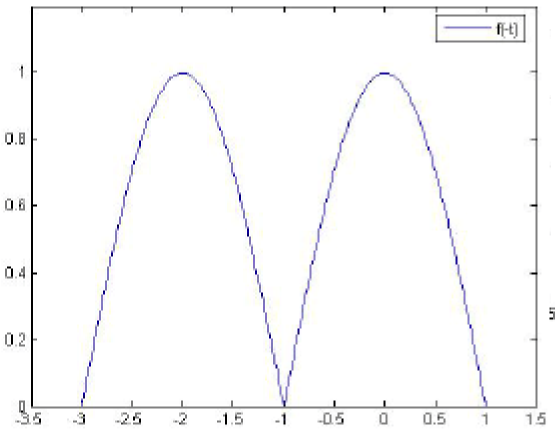
(a-3) (a-4)

（b）f（t）为偶函数，故只有偶分量，为其本身

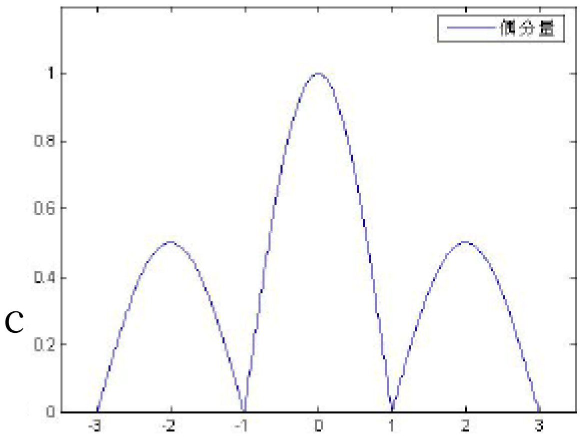


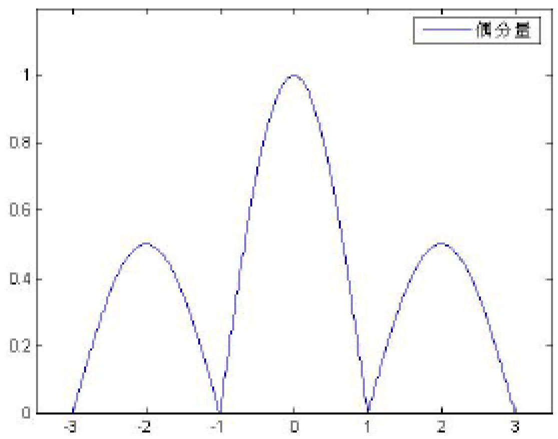


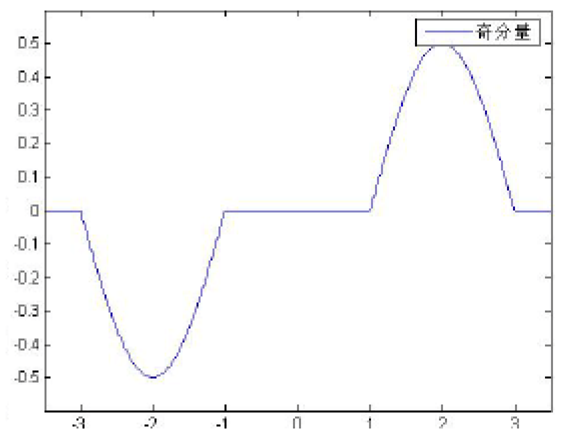
（c



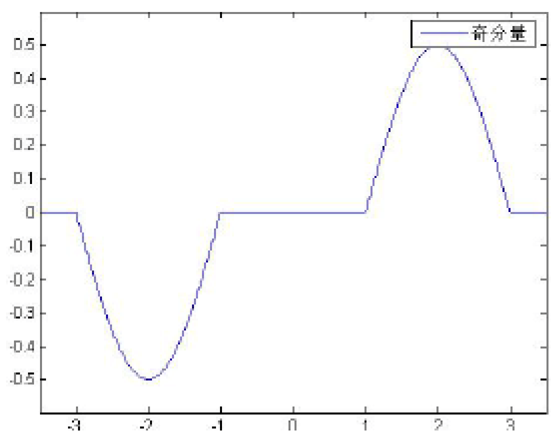
（c



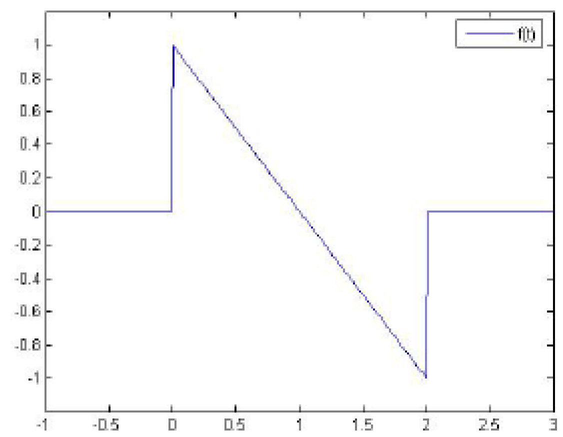




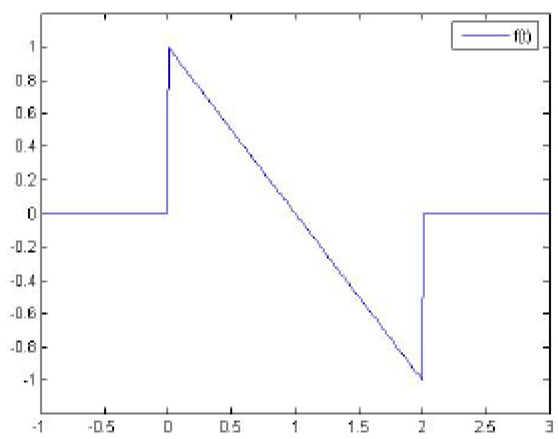
（c



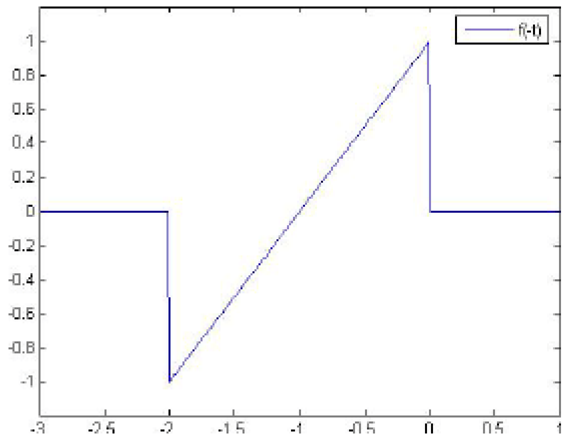
（c

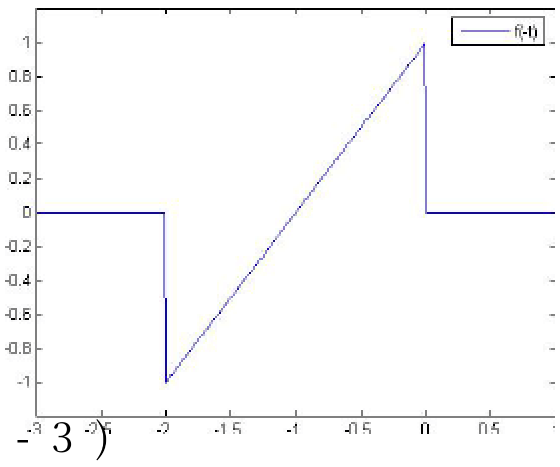


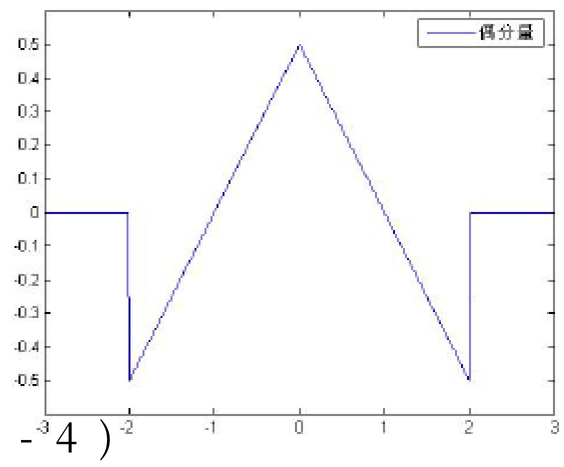
（d



（d







（d-3）　　（d-4）

1-2 分析过程：本题为判断系统性质：线性、时不变性、因果性

（1）线性（Linearity）：基本含义为叠加性和均匀性

即输入 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 得到的输出分别为 $y_1(t)$，$y_2(t)$，$T[x_1(t)]=y_1(t)$，$T[x_2(t)]=y_2(t)$，则 $T[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)]=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$（$c_1$，$c_2$ 为常数）。

线性系统是指系统的全响应可以分解为零输入响应和零状态响应，并且二者均分别具有线性性质。

本题未说明初始条件，可认为系统起始状态为零（“松弛”的），故零输入响应为零，只需判断系统的输入——输出是否满足线性。

（2）时不变性（Time-Invariance）：是指当激励延迟一段时间 t_0 时，其响应也同样延迟 t_0，波形形状不变。

（3）因果性（Causality）：是指系统在 t_0 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 的时刻有关，与未来的时刻无关。

满足因果性的系统又称为物理可实现系统。

判断因果性的方法：

① 通过时域关系式：$y(t)=T[x(t)]$ 判断是否可能有 $y(t_1)=T[x(t_2)]$，$t_1<t_2$ 的时刻出现。若有则非因果系统，否则为因果系统；

② 对于时间连续系统

$$\text{冲激响应}\quad h(t)\begin{cases}=h(t)u(t) & \text{因果系统}\\ \neq h(t)u(t) & \text{非因果系统}\end{cases}$$

③ 对于时间离散系统

$$\text{单位冲激响应}\quad h(n)\begin{cases}=h(n)u(n) & \text{因果系统}\\ \neq h(n)u(n) & \text{非因果系统}\end{cases}$$

解题过程：

（1）$r(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$

线性：$r_1(t)=\dfrac{de_1(t)}{dt}$、$r_2(t)=\dfrac{de_2(t)}{dt}$，则 $\dfrac{d[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]}{dt}=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时不变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $\dfrac{de(t-t_0)}{dt}=\dfrac{de(t-t_0)}{d(t-t_0)}=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$ 仅与此时刻 $e(t)$ 有关

（2）$r(t)=e(t)u(t)$

线性：设 $r_1(t)=e_1(t)u(t)$，$r_2(t)=e_2(t)u(t)$，

则 $[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]u(t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $e(t-t_0)u(t)\neq e(t-t_0)u(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻 $e(t)$有关

（3） $r(t)=\sin[e(t)]u(t)$

非线性：设 $r_1(t)=\sin[e_1(t)]u(t)$，$r_2(t)=\sin[e_2(t)]u(t)$，

则 $\sin[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]u(t)\neq\sin[c_1e_1(t)]u(t)+\sin[c_2e_2(t)]u(t)$

时变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $\sin[e(t-t_0)]u(t)\neq\sin[e(t-t_0)]u(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻 $e(t)$有关

（4） $r(t)=e(1-t)$

线性：设 $r_1(t)=e_1(1-t)$，$r_2(t)=e_2(1-t)$，则 $c_1e_1(1-t)+c_2e_2(1-t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设 $e_1(t)=u(t)-u(t-1.5)$，则 $r_1(t)=u(t+0.5)-u(t)$

$e_2(t)=e_1(t-0.5)=u(t-0.5)-u(t-2)$，则 $r_2(t)=u(t+1)-u(t-0.5)\neq r_1(t-0.5)$

非因果：取 $t=0$，则 $r(0)=e(1)$，即 $t=0$时刻输出与 $t=1$时刻输入有关。

（5） $r(t)=e(2t)$

线性：设 $r_1(t)=e_1(2t)$，$r_2(t)=e_2(2t)$，则 $c_1e_1(2t)+c_2e_2(2t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设 $e_1(t)=u(t)-u(t-2)$，则 $r_1(t)=u(t)-u(t-1)$

$e_2(t)=e_1(t-2)=u(t-2)-u(t-4)$，则 $r_2(t)=u(t-1)-u(t-2)\neq r_1(t-2)$

非因果：取 $t=1$，则 $r(1)=e(2)$，即 $t=1$时刻输出与 $t=2$时刻输入有关。

（6） $r(t)=e^2(t)$

非线性：设 $r_1(t)=e_1^2(t)$，$r_2(t)=e_2^2(t)$

则 $[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]^2=c_1^2e_1^2(t)+c_2^2e_2^2(t)+2c_1c_2e_1(t)e_2(t)\neq c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时不变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $e^2(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻 $e(t)$有关

时变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $e(t-t_0)u(t) \neq e(t-t_0)u(t-t_0) = r(t-t_0)$

因果：$r(t)$ 仅与此时刻 $e(t)$ 有关

（3） $r(t)=\sin[e(t)]u(t)$

非线性：设 $r_1(t)=\sin[e_1(t)]u(t)$，$r_2(t)=\sin[e_2(t)]u(t)$，

则 $\sin[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]u(t) \neq \sin[c_1e_1(t)]u(t)+\sin[c_2e_2(t)]u(t)$

时变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $\sin[e(t-t_0)]u(t) \neq \sin[e(t-t_0)]u(t-t_0) = r(t-t_0)$

因果：$r(t)$ 仅与此时刻 $e(t)$ 有关

（4） $r(t)=e(1-t)$

线性：设 $r_1(t)=e_1(1-t)$，$r_2(t)=e_2(1-t)$，则 $c_1e_1(1-t)+c_2e_2(1-t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设 $e_1(t)=u(t)-u(t-1.5)$，则 $r_1(t)=u(t+0.5)-u(t)$

$e_2(t)=e_1(t-0.5)=u(t-0.5)-u(t-2)$，则 $r_2(t)=u(t+1)-u(t-0.5) \neq r_1(t-0.5)$

非因果：取 $t=0$，则 $r(0)=e(1)$，即 $t=0$ 时刻输出与 $t=1$ 时刻输入有关。

（5） $r(t)=e(2t)$

线性：设 $r_1(t)=e_1(2t)$，$r_2(t)=e_2(2t)$，则 $c_1e_1(2t)+c_2e_2(2t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设 $e_1(t)=u(t)-u(t-2)$，则 $r_1(t)=u(t)-u(t-1)$

$e_2(t)=e_1(t-2)=u(t-2)-u(t-4)$，则 $r_2(t)=u(t-1)-u(t-2) \neq r_1(t-2)$

非因果：取 $t=1$，则 $r(1)=e(2)$，即 $t=1$ 时刻输出与 $t=2$ 时刻输入有关。

（6） $r(t)=e^2(t)$

非线性：设 $r_1(t)=e_1^2(t)$，$r_2(t)=e_2^2(t)$

则 $[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)]^2=c_1^2e_1^2(t)+c_2^2e_2^2(t)+2c_1c_2e_1(t)e_2(t) \neq c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

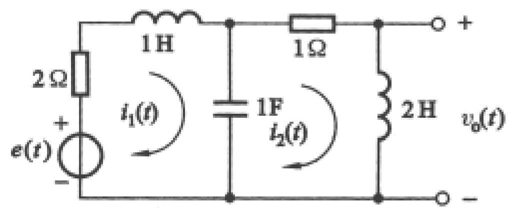
时不变：输入 $e(t-t_0)$，输出 $e^2(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$ 仅与此时刻 $e(t)$ 有关

信号与系统习题答案（注：教材 - 郑君里编）

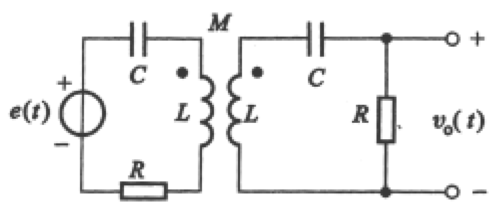
习题二

2 - 1对下图所示电路图分别列写求电压的微分方程表示。

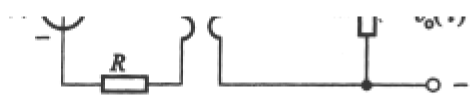


(a)

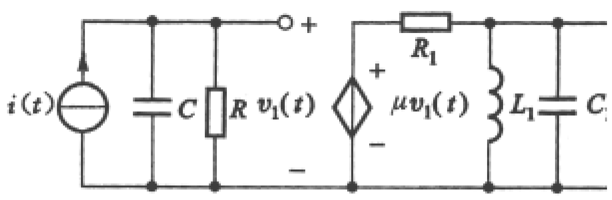
(a)



(b)



(b)



(c)

图（ a 微分方程：

信号与系统习题答案（注：教材 - 郑君里编）

习题二

2 - 1对下图所示电路图分别列写求电压的微分方程表示。

$$2\frac{d^3}{dt^3}v_0(t)+5\frac{d^2}{dt^2}v_0(t)+5\frac{d}{dt}v_0(t)+3v_0(t)=2\frac{d}{dt}e(t)$$

图（a 微分方程：

信号与系统习题答案（注：教材 - 郑君里编）

习题二

2 - 1对下图所示电路图分别列写求电压的微分方程表示。

图（ a 微分方程：

（3）$2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$ $\quad\because\ \frac{d}{dt}e(t)=\delta(t)$ 即方程右边含有 $\delta(t)$

设：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$

$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r(t)=a\Delta u(t)$

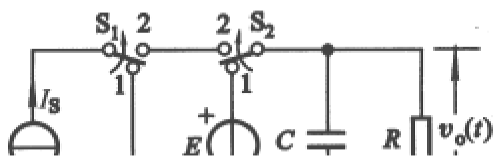
则有：$2a\delta'(t)+2b\delta(t)+2c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)+4a\Delta u(t)=\delta(t)$

$\therefore\quad a=0\qquad b=\frac{1}{2}\qquad c=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ r(0_+)=r(0_-)+a=1$

$r'(0_+)=r'(0_-)+b=\frac{3}{2}$

2-7 电路如图所示，$t<0$ 以前开关位于“1”，已进入稳态，$t=0$ 时刻，S_1 和 S_2 同时自“1”转至“2”，求输出电压 $v_0(t)$ 的完全响应，并指出其零输入、零状态、自由、强迫各响应分量（E 和 I_S 各为常量）。



题图 2-7

解：$t=0_-$ 时刻，$u_c(0_-)=E=v_0(0_-)$

$C\,u_c'(t)+\frac{v_0(t)}{R}=$

$v_0(t)=u_c(t)$

∴系统微分方程：$C\frac{d}{dt}v_0(t)$

零状态响应：$r_{zi}(t)=(A_1e^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)=(-RI_Se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)$

零输入响应：$r_{zs}(t)=A_2e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$

完全响应：$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=(Ee^{-\frac{1}{RC}t}-RI_Se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)$

2-8 电路如图所示，$t<0$ 时，开关位于“1”且已达到稳定状态，$t=0$ 时刻，开关自“1”转至“2”。

（1）（1） 试从物理概念判断 $i(0_-)$，$i'(0_-)$ 和 $i(0_+)$，$i'(0_+)$；

（2）（2） 写出 $t\geq0_+$ 时间内描述系统的微分方程表示，求 $i(t)$ 的完全响应；

（3）（3） 写出一个方程式，可在时间 $-\infty<t<\infty$ 内描述系统，根据此式利用冲

(3) $2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$ $\quad\because \frac{d}{dt}e(t)=\delta(t)$ 即方程右边含有 $\delta(t)$

设：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$

$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r(t)=a\Delta u(t)$

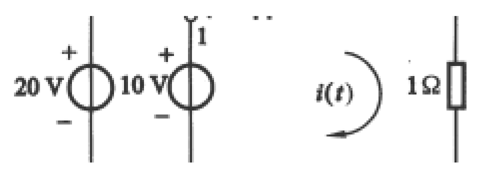
则有：$2a\delta'(t)+2b\delta(t)+2c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)+4a\Delta u(t)=\delta(t)$

$\therefore\quad a=0\qquad b=\frac{1}{2}\qquad c=-\frac{3}{4}$

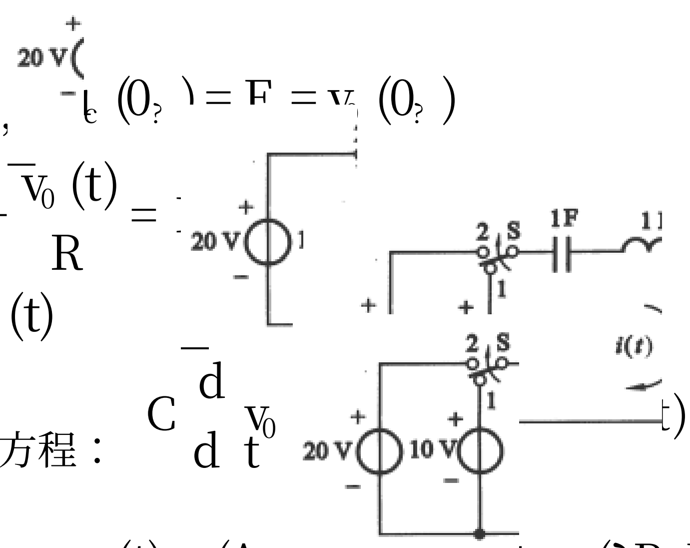
$\therefore\ r(0_+)=r(0_-)+a=1$

$r'(0_+)=r'(0_-)+b=\frac{3}{2}$

2 - 电路如图所示，$t=0$以前开关位于"1"，已进入稳态，$t=0$时刻，S_1和S_2同时自"1"转至"2"，求输出电压 $v_0(t)$的完全响应，并指出其零输入、零状态、自由、强迫各响应分量（E和 I_S各为常量）。



题图 2 - 7



解：$t=0_-$时刻，$u_c(0_-)=E=v_0(0_-)$

$\because C\frac{d}{dt}u_c(t)+\frac{v_0(t)}{R}=$

$v_0(t)=u_c(t)$

∴系统微分方程：$C\frac{d}{dt}v_0$

零状态响应：$r_{zi}(t)=(A_1e$ $\quad=(-RI_se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s)u(t)$

零输入响应：$r_{zs}(t)=A_2e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$

完全响应：$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=(Ee^{-\frac{1}{RC}t}-RI_se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s)u(t)$

2 - 电路如图所示，$t<0$时，开关位于"1"且已达到稳定状态，$t=0$时刻，开关自"1"转至"2"。

（1） 试从物理概念判断 $i(0_-)$、$i'(0_-)$和$i(0_+)$、$i'(0_+)$；

（2） 写出$t\ge0_+$时间内描述系统的微分方程表示，求 $i(t)$的完全响应；

（3） 写出一个方程式，可在时间$-\infty<t<\infty$内描述系统，根据此式利用冲

（3）$2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$ ∵ $\frac{d}{dt}e(t)=\delta(t)$ 即方程右边含有 $\delta(t)$

设：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$

$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r(t)=a\Delta u(t)$

则有：$2a\delta'(t)+2b\delta(t)+2c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)+4a\Delta u(t)=\delta(t)$

∴ $a=0 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{3}{4}$

∴ $r(0_+)=r(0_-)+a=1$

$r'(0_+)=r'(0_-)+b=\frac{3}{2}$

2-7 电路如图所示，$t=0$ 以前开关位于“1”，已进入稳态，$t=0$ 时刻，S_1 和 S_2 同时自“1”转至“2”，求输出电压 $v_0(t)$ 的完全响应，并指出其零输入、零状态、自由、强迫各响应分量（E 和 I_S 各为常量）。

题图 2-7

解：$t=0_-$ 时刻，$u_c(0_-)=E=v_0(0_-)$

$C\frac{d}{dt}u_c(t)+\frac{v_0(t)}{R}=I_S$

$v_0(t)=u_c(t)$

∴系统微分方程：$C\frac{d}{dt}v_0(t)+\frac{1}{R}v_0(t)=I_S$

零状态响应：$r_{zi}(t)=(A_1e^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)=(-RI_Se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)$

零输入响应：$r_{zs}(t)=A_2e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$

完全响应：$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=(Ee^{-\frac{1}{RC}t}-RI_Se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S)u(t)$

2-8 电路如图所示，$t<0$ 时，开关位于“1”且已达到稳定状态，$t=0$ 时刻，开关自“1”转至“2”。

（1）试从物理概念判断 $i(0_-)$，$i'(0_-)$ 和 $i(0_+)$，$i'(0_+)$；

（2）写出 $t\ge0_+$ 时间内描述系统的微分方程表示，求 $i(t)$ 的完全响应；

（3）写出一个方程式，可在时间 $-\infty<t<\infty$ 内描述系统，根据此式利用冲

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=\left(\frac{1}{p+1}+2\right)\delta(t)$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}\left(\frac{1}{p+1}+2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5}\right)$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1(t)=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$\therefore\ r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2(t)=(1-p)r_{zs1}(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}\left(\frac{2}{p+1}-1\right)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

∴系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=(\frac{1}{p+1}+2)\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}(\frac{1}{p+1}+2)=\frac{1}{4}(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5})$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t})u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}(\frac{2}{p+1}-1)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

∴系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。

解：$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=\left(\frac{1}{p+1}+2\right)\delta(t)$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}\left(\frac{1}{p+1}+2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5}\right)$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1(t)=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2(t)=(1-p)r_{zs1}(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}\left(\frac{2}{p+1}-1\right)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p}\delta(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

∴系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

2-10 因果性的LTI系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=\left(\frac{1}{p+1}+2\right)\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}\left(\frac{1}{p+1}+2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5}\right)$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2 \quad 2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}\left(\frac{2}{p+1}-1\right)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

$\therefore$系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=\left(\frac{1}{p+1}+2\right)\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}\left(\frac{1}{p+1}+2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5}\right)$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1(t)=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}\left(\frac{2}{p+1}-1\right)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p}\delta(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

$\therefore$ 系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)-e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=(\frac{1}{p+1}+2)\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}(\frac{1}{p+1}+2)=\frac{1}{4}(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5})$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t})u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) $\because\ r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}(\frac{2}{p+1}-1)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{p}\delta(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

$\therefore$ 系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

2-10 因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$代入

$$\therefore\ \frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=(\frac{1}{p+1}+2)\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+5}(\frac{1}{p+1}+2)=\frac{1}{4}(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5})$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t})u(t)$$

2-11 有一系统对激励为 $e_1=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1) ∵ $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_2(t)=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$\therefore\ r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$$r_1(t)-r_2(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}(\frac{2}{p+1}-1)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

∴系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

2-6 解题过程：

（1） $e(t)=u(t)$， $r(0_-)=1$， $r'(0_-)=2$

方法一：经典时域法：

①求 r_{zi}：由已知条件，有
$$\begin{cases} r_{zi}''(t)+3r_{zi}'(t)+2r_{zi}(t)=0 \\ r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=2 \\ r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=1 \end{cases}$$

特征方程： $\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为： $\alpha_1=-1$， $\alpha_2=-2$

故 $r_{zi}(t)=\left(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\right)u(t)$，代入 $r_{zi}'(0_+)$， $r_{zi}(0_+)$ 得 $A_1=4$， $A_2=-3$

故 $r_{zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

②求 r_{zs}： 将 $e(t)=u(t)$ 代入原方程，有 $r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=\delta(t)+3u(t)$

用冲激函数匹配法，设
$$\begin{cases} r_{zs}''(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ r_{zs}'(t)=a\Delta u(t) \\ r_{zs}(t)=a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入微分方程，平衡 $\delta(t)$ 两边的系数得 $a=1$

故 $r_{zs}'(0_+)=r_{zs}'(0_-)+1=1$， $r_{zs}(0_+)=r_{zs}(0_-)=0$

再用经典法求 $r_{zs}(t)$：齐次解 $r_{zsh}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}\right)u(t)$

因为 $e(t)=u(t)$ 故设特解为 $r_{zsp}(t)=C\cdot u(t)$ 代入原方程得 $C=\frac{3}{2}$

故 $r_{zs}(t)=r_{zsh}(t)+r_{zsp}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

代入 $r_{zs}'(0_+)$， $r_{zs}(0_+)$ 得 $B_1=-2$， $B_2=\frac{1}{2}$

故 $r_{zs}(t)=\left(-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

③全响应： $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

自由响应： $\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

方法二： p算子法

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

化为算子形式为：$(p^2+3p+2)r(t)=(p+3)e(t)$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为：$\alpha_1=-1,\quad \alpha_2=-2$

$r_{zi}(t)$的求法与经典时域法一致，$r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

再求 $r_{zs}(t)$: $e(t)=u(t)$, $r(t)=\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}u(t)=(p+3)\left[e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)*u(t)\right]$

其中 $e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)*u(t)=\int_0^t\left(e^{-\tau}-e^{-2\tau}\right)d\tau=\left[\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)$

$\therefore r_{zs}(t)=(p+3)\left[\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)=\left[-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right]u(t)$

∴全响应 $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right]u(t)$

自由响应：$\left[2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}\right]u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

综观以上两种方法可发现 p算子法更简洁，准确性也更高

（2） $e(t)=e^{-3t}u(t)$, $r(0_-)=1$, $r'(0_-)=2$

运用和上题同样的方法，可得

全响应 $r(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})u(t)$

零输入响应：$r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

零状态响应：$r_{zs}(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

自由响应：$(5e^{-t}-4e^{-2t})u(t)$

受迫响应： 0

2 - 10 分析：

$$\frac{d}{dt} r(t) + 5r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) f(t-\tau) d\tau - e(t) = e(t) * f(t) - e(t) = e(t) * [f(t) - \delta(t)]$$

已知冲激函数 $\delta(t)$ 与单位冲激响应 $h(t)$ 为“输入——输出”对，故 $e(t)=\delta(t)$ 时，

$r(t)=h(t)$。类似上题，也可以用经典法和算子法两种思路求解该微分方程。

解题过程：方法一：经典法

代入 $e(t)=\delta(t)$，$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$ 得到

$$\frac{d}{dt} h(t) + 5h(t) = e^{-t}u(t) + 2\delta(t) \quad \cdots\cdots (*)$$

对于因果系统 $h(0_-)=0$

先求满足 $\frac{d}{dt} h_1(t) + 5h_1(t) = \delta(t)$ 的 $h_1(t)$：$h_1(t) = A e^{-5t}u(t)$

利用冲激函数匹配法，在 $(0_-, 0_+)$ 时间段内

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_1(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ h_1(t) = a\Delta u(t) \end{cases} \quad (0_- < t < 0_+)$$

$$\Rightarrow a\delta(t) + b\Delta u(t) + 5a\Delta u(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -5$$

$$\Rightarrow h_1(0_+) = a + h(0_-) = A = 1$$

$$\Rightarrow h_1(t) = e^{-5t}u(t)$$

对于 $(*)$ 式：

$$h(t) = h_1(t) * [e^{-t}u(t) + 2\delta(t)] = e^{-5t}u(t) * e^{-t}u(t) + 2e^{-5t}u(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

方法二：p算子法

（常用关系式：① $\frac{d\,x(t)}{dt} = p\,x(t)$，② $e^{-\lambda t}u(t) = \frac{1}{p+\lambda}\delta(t)$

③ $\frac{1}{p+\lambda} x(t) = \frac{1}{p+\lambda}[\delta(t) * x(t)] = \left[\frac{1}{p+\lambda}\delta(t)\right] * x(t) = e^{-\lambda t}u(t) * x(t)$）

引入微分算子 p，$(*)$ 式变成：

$$(p+5)h(t) = \frac{1}{p+1}\delta(t) + 2\delta(t)$$

$$\therefore\ h(t)=\frac{-1}{p+5}\cdot\frac{1}{p+1}\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)=\left[\frac{-\frac{1}{4}}{p+5}+\frac{\frac{1}{4}}{p+1}\right]\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)$$

$$\therefore\ h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$$

注：由本例再次看到，相比经典法， p算子法形式简洁，易算易记。

2－14 分析：求解两个信号的卷积，可以直接用定义，依照“反转 $\rightarrow$ 平移 $\rightarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 求和”的顺序来求，积分式为 $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$，但是这种依靠定义的基本方法可能不是最简便的。更应该注意灵活运用卷积的性质（卷积的交换律、结合律、分配律；卷积的微分与积分；与冲激函数或阶跃函数的卷积） 对表达式进一步的化简， 甚至直接得到结果。

解题过程：

（1） $f(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)\end{aligned}$$

（2） $f(t)=u(t-1)-u(t-2)=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]*u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=(t-2)u(t-2)-2(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$

注：可见（2）中的 $s(t)$ 是（1）中 $s(t)$ 右移两位，不难推出如下结论：

$$s_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$s_2(t)=x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=s_1(t-t_1-t_2)\qquad (t_1\geq 0\ \ t_2\geq 0)$$

2．15 分析：利用卷积的性质： $f(t)*[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]=f(t+t_0)+f(t-t_0)$ 可画出如下波形：

（1） $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]=f_1(t+5)+f_2(t-5)$

（2） $s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

$$\therefore\ h(t)=\frac{1}{p+5}\cdot\frac{1}{p+1}\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)=\left[\frac{-\frac{1}{4}}{p+5}+\frac{\frac{1}{4}}{p+1}\right]\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)$$

$$\therefore\ h(t)=\left[\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right]u(t)$$

注：由本例再次看到，相比经典法，p算子法形式简洁，易算易记。

2 - 14 分析：求解两个信号的卷积，可以直接用定义，依照“反转 $\rightarrow$ 平移 $\rightarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 求和”的顺序来求，积分式为 $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$，但是这种依靠定义的基本方法可能不是最简便的。更应该注意灵活运用卷积的性质（卷积的交换律、结合律、分配律；卷积的微分与积分；与冲激函数或阶跃函数的卷积） 对表达式进一步的化简， 甚至直接得到结果。

解题过程：

（1） $f(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)\end{aligned}$$

（2） $f(t)=u(t-1)-u(t-2)=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]*u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=(t-2)u(t-2)-2(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$

注：可见（2）中的 $s(t)$ 是（1）中 $s(t)$ 右移两位，不难推出如下结论：

$$s_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$s_2(t)=x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=s_1(t-t_1-t_2)\qquad(t_1\geq 0\ \ t_2\geq 0)$$

2 . 15 分析：利用卷积的性质： $f(t)*[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]=f(t+t_0)+f(t-t_0)$ 可画出如下波形：

（1） $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]=f_1(t+5)+f_2(t-5)$

（2） $s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

$$\therefore h(t)=\frac{1}{p+5}\cdot\frac{1}{p+1}\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)=\left[\frac{-\frac{1}{4}}{p+5}+\frac{\frac{1}{4}}{p+1}\right]\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)$$

$$\therefore h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$$

注：由本例再次看到，相比经典法， p算子法形式简洁，易算易记。

2-14 分析：求解两个信号的卷积，可以直接用定义，依照“反转 $\rightarrow$ 平移 $\rightarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 求和”的顺序来求，积分式为 $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$，但是这种依靠定义的基本方法可能不是最简便的。更应该注意灵活运用卷积的性质（卷积的交换律、结合律、分配律；卷积的微分与积分；与冲激函数或阶跃函数的卷积）对表达式进一步的化简，甚至直接得到结果。

解题过程：

（1） $f(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]\\&=t\,u(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)\end{aligned}$$

（2） $f(t)=u(t-1)-u(t-2)=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]*u(t)*[\delta(t-1)-\delta(t-2)]\\&=[u(t)*u(t)]*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=t\,u(t)*[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]\\&=(t-2)u(t-2)-2(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$

注：可见（2）中的 $s(t)$ 是（1）中 $s(t)$ 右移两位，不难推出如下结论：

$$s_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$s_2(t)=x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=s_1(t-t_1-t_2)\qquad(t_1\geq 0,\ t_2\geq 0)$$

2.15 分析：利用卷积的性质： $f(t)*[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]=f(t+t_0)+f(t-t_0)$ 可画出如下波形：

（1） $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]=f_1(t+5)+f_2(t-5)$

（2） $s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

$$H\left(e(t)\right)=r(t)\Rightarrow H\left[2e^{-3t}u(t)\right]=r(t)$$

$$H\left[\frac{d}{dx}e(t)\right]=H\left[2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)\right]=-3r(t)+e^{-2t}u(t)\quad\cdots\cdots(5)$$

$$(4)*3+(5)\Rightarrow h(t)=H\left[\delta(t)\right]=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

2-24 解题过程：由系统框图知， $r(t)=e(t)*h_1(t)+e(t)*h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$

$$=e(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)\right]$$
$$=e(t)*h(t)$$

$$\therefore h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$$

其中， $h_1(t)=u(t)$， $h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=\delta(t-1)*u(t)*\left[-\delta(t)\right]=-u(t-1)$

$$\therefore h(t)=u(t)-u(t-1)$$

3-1 解题过程：

（1）三角形式的傅立叶级数（Fourier，以下简称 FS）

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

式中 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$， n为正整数， T_1为信号周期

（a）直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,dt$$

（b）余弦分量的幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$$

（c）正弦分量的幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$$

（2）指数形式的傅立叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

其中复数频谱 $$F_n=F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt$$

$$F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)\qquad F_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$$

由图 3-1 可知， $f(t)$为奇函数，因而 $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}\sin(n\omega_1 t)\,dt=-\frac{2E}{n\omega_1 T}\cos(n\omega_1 t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{E}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,\cdots\end{cases}$$

所以，三角形式 FS 为

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots\right]\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

指数形式的 FS

$$F_n=-\frac{1}{2}jb_n=\begin{cases}0 & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ -j\dfrac{E}{n\pi} & n=0,\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$$

所以，指数形式的 FS 为

$$f(t)=\cdots-\frac{jE}{\pi}e^{j\omega_1 t}+\frac{jE}{\pi}e^{-j\omega_1 t}-\frac{jE}{3\pi}e^{j3\omega_1 t}+\frac{jE}{3\pi}e^{-j3\omega_1 t}+\cdots\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

3-15 分析：半波余弦脉冲的表达式 $f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

求 $f(t)$ 的傅立叶变换有如下两种方法。

解题过程：

方法一：用定义

$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{E}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)t}+e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)t}\right]dt$$

$$=\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]-\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}\left[e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]$$

$$=\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}-\omega}+\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}+\omega}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

方法二：用 FT 的性质和典型的 FT 对

$$f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}F\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*F\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其中 $F\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]=\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$，

$$F\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

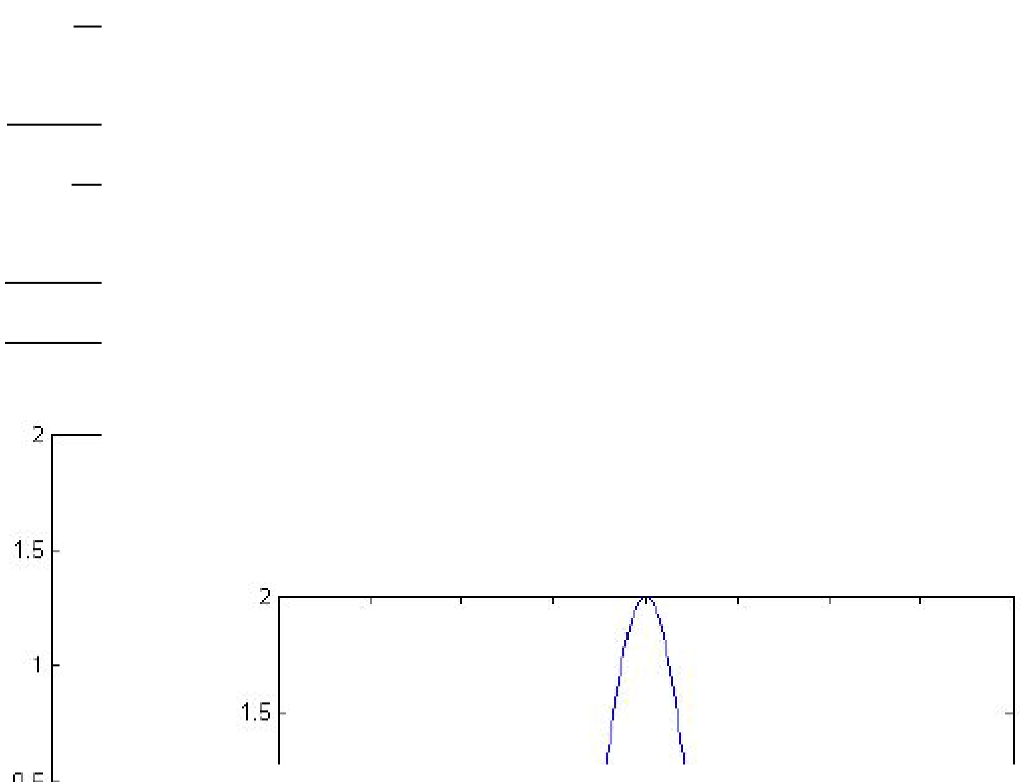
代入 $F(\omega)=\frac{E}{2\pi}F\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*F\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$ 得

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\cdot\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]*\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$=E\left[\frac{\sin\dfrac{\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}}{\omega+\frac{\pi}{\tau}}+\frac{\sin\dfrac{\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}}{\omega-\frac{\pi}{\tau}}\right]$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

其频谱图如下图所示：



3-1 本题意在说明：对于两频域信号，如果其幅频特性相同，但是相频特性不同则它们对 时域信号是不一样的。

解题过

（a） $|F(\omega)|=A\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$，$\varphi(\omega)=\omega t_0\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

所以，$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

先求 $F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 的 FT: $f_1(t)$

由 $F\left[Sa(\omega_c t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]$

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\left\{\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]*\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right\}$$

$$=E\left\{\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega+\frac{\pi}{\tau}}+\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega-\frac{\pi}{\tau}}\right\}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

其频谱图如下图所示：

3-1 本题意在说明：对于两频域信号，如果其幅频特性相同，但是相频特性不同则它们对[illegible]时域信号是不一样的。

解题过[illegible]

（a） $|F(\omega)|=A\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$， $\varphi(\omega)=\omega t_0\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

所以， $F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

先求 $F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 的 FT: $f_1(t)$

由 $F\left[Sa(\omega_c t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]$

利用（2）的结论，$F(\omega)$ 的时间函数 $f(t)=\frac{\omega_0^2}{\pi^2}Sa(\omega_0 t)$

3 - 32 解题过程：利用性质：$F(x(t)?y(t))=\frac{1}{2\pi}F[x(t)]?F[y(t)]$

$$F[\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2\pi}F[\sin(\omega_0 t)]?F[u(t)]$$

单边正弦函数的 FT：$=\frac{1}{2\pi}?j\pi[\delta(\omega+\omega_0)?\delta(\omega?\omega_0)]?\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$

$$=\frac{j\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega?\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2?\omega^2}$$

利用（2）的结论，$F(\omega)$ 的时间函数 $f(t)=\frac{\omega_0^2}{\pi^2}Sa(\omega_0 t)$

3-22 解题过程：利用性质：$F(x(t)\cdot y(t))=\frac{1}{2\pi}F[x(t)]*F[y(t)]$

$$F[\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2\pi}F[\sin(\omega_0 t)]*F[u(t)]$$

单边正弦函数的 FT：$=\frac{1}{2\pi}\{j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\}*\left\{\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right\}$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

利用（2）的结论，$F(\omega)$的时间函数 $f(t)=\frac{\omega_0^2}{\pi^2}Sa(\omega_0 t)$

3-32解题过程：利用性质：$F\left(x(t)\cdot y(t)\right)=\frac{1}{2\pi}F[x(t)] * F[y(t)]$

$$F[\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2\pi}F[\sin(\omega_0 t)] * F[u(t)]$$

单边正弦函数的FT：$=\frac{1}{2\pi}\left\{j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\right\} * \left\{\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right\}$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{(s+4)(s+2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{6}{s+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\}=6e^{-4t}-3e^{-2t}$$

（7） $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}+1\right\}=\sin t+\delta(t)$

（8） 由 $\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$ 得

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{2t}-e^{t}$$

（9） 由 $\frac{1}{s(RCs+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$ 得 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(RCs+1)}\right\}=1-e^{-\frac{t}{RC}}$

（10） 由 $\frac{1-RCs}{s(RCs+1)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+\frac{1}{RC}}$ 得 $L^{-1}\left\{\frac{1-RCs}{s(RCs+1)}\right\}=1-2e^{-\frac{t}{RC}}$

（11） 由 w … 1 … RC … 1 … $\frac{s}{s^2+w^2}+\frac{w}{R\,C\,s}$ 得

… R … $e^{-\frac{t}{RC}}-\cos wt+\frac{1}{RCw}\sin wt$

（12） 由 … $L^{-1}\left\{\frac{4s+5}{s^2+5s+6}\right\}=7e^{-3t}-3e^{-2t}$

（13） 由 … 50) … 20 …

50) … 0 … (4 … 20t0)

120 … 9

（14） 令 $\frac{\quad}{(s+\quad+2)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{(s+1)^3}+\frac{k_3}{(s+1)^2}+\frac{k_4}{s+1}$

则 $k_1=\left.\frac{s+3}{(s+1)^3}\right|_{s=-2}=-1$， $k_2=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-1}=2$，

$$k_3=\frac{d}{ds}\left.\left\{\frac{s+3}{s+1}\right\}\right|_{s=-1}=-1,\qquad k_4=\frac{d^2}{ds^2}\left.\left\{\frac{s+3}{s+1}\right\}\right|_{s=-1}=1$$

从而 $\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$

所以 $L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}\right\} = -e^{-t} + \left(t^2 - t+1\right)e^{-t}$

（15）由 $\frac{A}{s^2+K^2} = \frac{A}{K}\cdot\frac{K}{s^2+K^2}$ 得 $L^{-1}\left\{\frac{A}{s^2+K^2}\right\} = \frac{A}{K}\sin Kt$

（16）由于 $L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+3^2\right)^2}\right\} = \frac{1}{2\cdot 3}t\sin Kt$ 由拉氏变换积分性质可得

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+3^2\right)^2}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2\cdot 3}\tau\sin(3\tau)\,d\tau = \frac{3}{18}\sin(3t) - \frac{t}{6}\cos(3t)$$

4-19 解题过程：

由于 $f(t)$ 可以写作 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)$

$$= F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

则 $L\{f(t)\} = F(s) = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)\right\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} L\{f_1(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_1(s)e^{-skT}$$

$$= F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

4-20 解题过程

（1）周期矩形脉冲信号的第一个周期时间信号为 $f_1(t)$

所以 $F_1(s) = \frac{1}{s}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)$ 则 $F(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} = \frac{1-e^{-\frac{sT}{2}}}{s\left(1-e^{-sT}\right)} = \frac{1}{s\left(1+e^{-\frac{sT}{2}}\right)}$

（2）正弦全波整流脉冲信号第一周期时间信号为

$$f_1(t)=\sin(\omega t)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]=\sin(\omega t)u(t)+\sin\left[\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

所以 $F_1(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}+\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{T}{2}s}$ 则 $F(s)=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1+e^{-\frac{T}{2}s}}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}$

4－27 解题过程：由 $e(t)=e^{-t}$ 得 $E(s)=L[e(t)]=\dfrac{1}{s+1}$

$$r_{zs}(t)=r(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-e$$

$$R_{zs}(s)=L[r_{zs}(t)]=\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}$$

故 $H(s$

$$=\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}\right]\cdot(s+1)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{s+1}{s+2}+\frac{2(s+1)}{s-3}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{s+2}+\frac{8}{s-3}$$

所以 $h(s)=L^{-1}[H(s)]=\dfrac{3}{2}\delta(t)+\left(e^{-2t}+8e^{3t}\right)u(t)$

4－31 解题过程：

$$H(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{k}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{l}(s-p_j)}\qquad \text{（K 为系数）}$$

$$=K\frac{s(s+2-j)[s-(-2+j)]}{(s+3)[s-(-1-3j)][s-(-1+3j)]}$$

$$=K\frac{s\left(s^2+4s+5\right)}{(s+3)\left(s^2+2s+10\right)}$$

又知 $H(\infty)=5$，即 $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=K=5$

$$H(s)=\frac{5s\left(s^2+4s+5\right)}{(s+3)\left(s^2+2s+10\right)}=\frac{5\left(s^3+4s^2+5s\right)}{s^3+5s^2+16s+30}$$

4－38 解题过程：

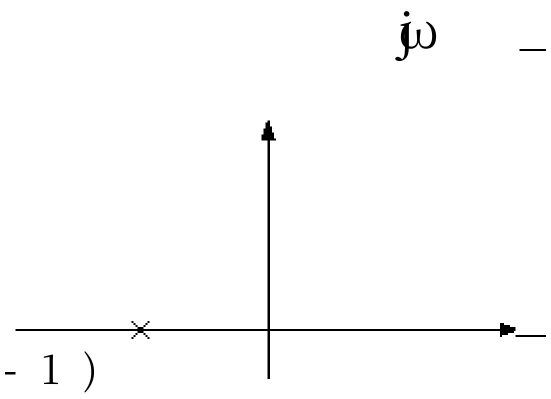
分别画出题图对应的零极点图如下图 （ a - 2)所示。f - 2 ）

（1) 由解图（ a 有,1 ）

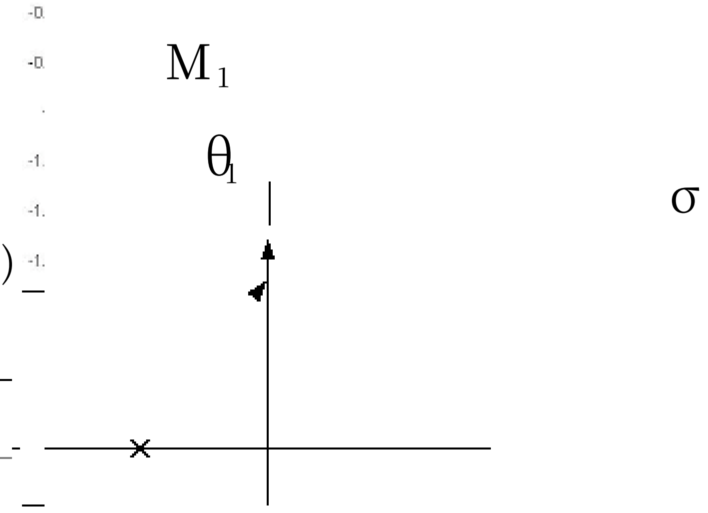
当 $\omega=0$时，极点矢量 M_1最短，辐角 $\theta_1=0$，随着 $\omega\uparrow$，有 $M_1\uparrow$， $\theta_1\uparrow$

当 $\omega\to\infty$时， $M_1\to\infty$， $\theta_1\to\frac{\pi}{2}$

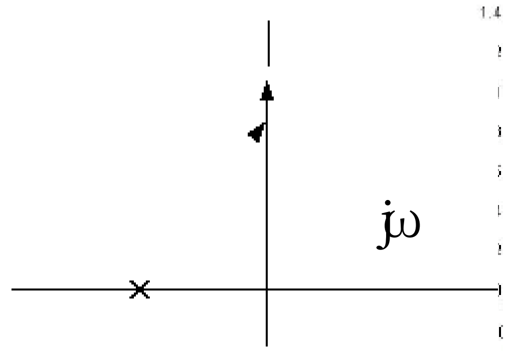
幅频、相频特性如图（ a - 3 ）（ a - 4 ）（选取 - 0为例 ）



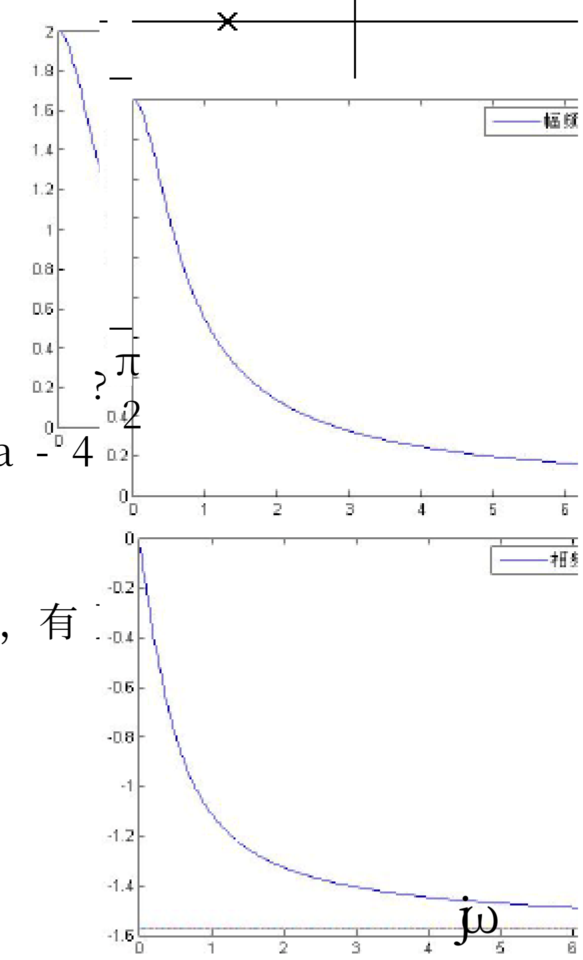
（ a - 1 ）



（ a - 2 ）



（ a - 3 ）



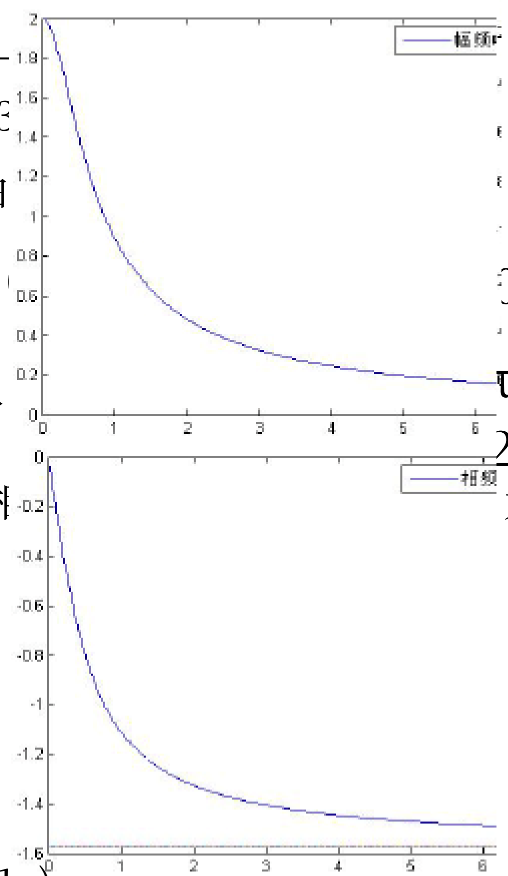
（ a - 4 ）

（2) 由

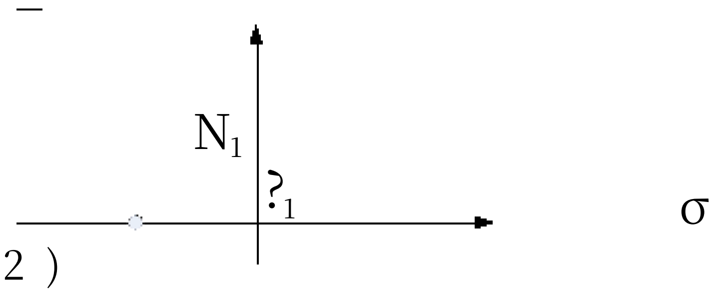
当 $\omega=$ 0，随着 $\omega\uparrow$，有

当 $\omega\to$

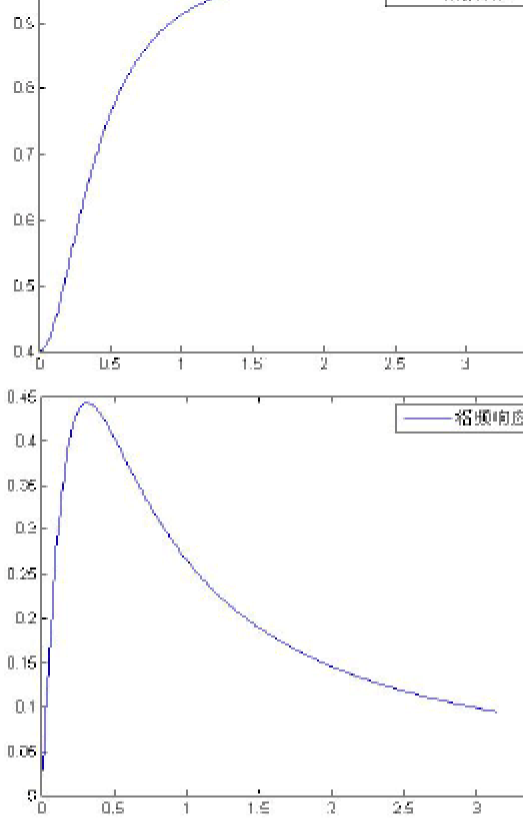
幅频、相 为例 ）



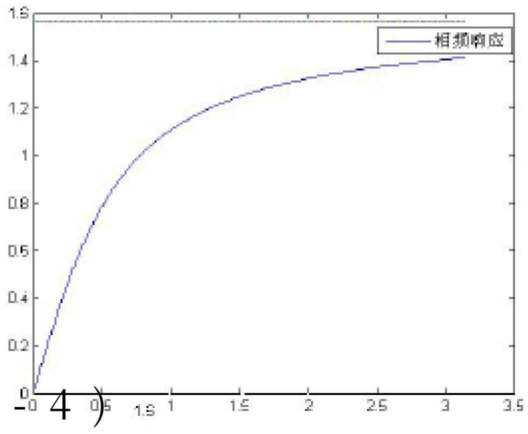
（ b - 1 ）



（ b - 2 ）



（b - 3）



（b - 4）

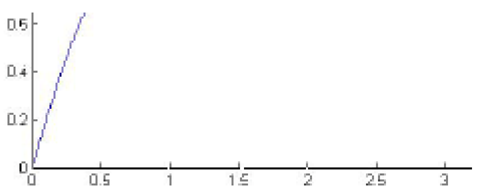
（3）由解图（b）有，

$\omega = 0$时，M_1，N_1均为最短，辐角 $\theta_1 = \varphi_1 = 0$

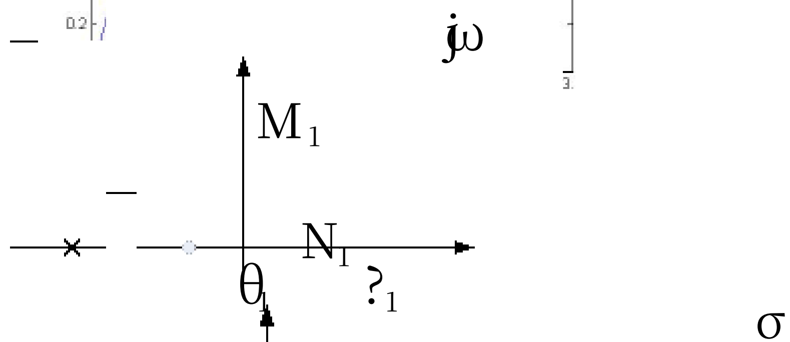
$\omega \uparrow$，则有 $M_1 \uparrow$，$N_1 \uparrow$，且有 $\theta_1 \uparrow$，$\varphi_1 \uparrow$，且有 $\theta_1 < \varphi_1$

$\omega \to \infty$时，$M_1 \to \infty$，$N_1 \to \infty$，$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$，$\varphi_1 \to \frac{\pi}{2}$

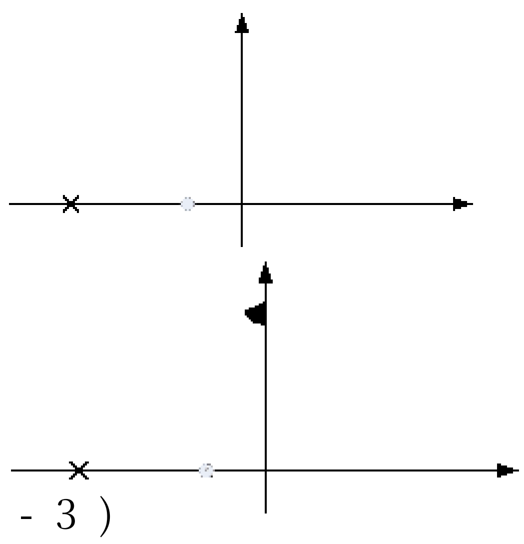
幅频、相频特性如图（以极点 -0.5，零点 -0 为例）



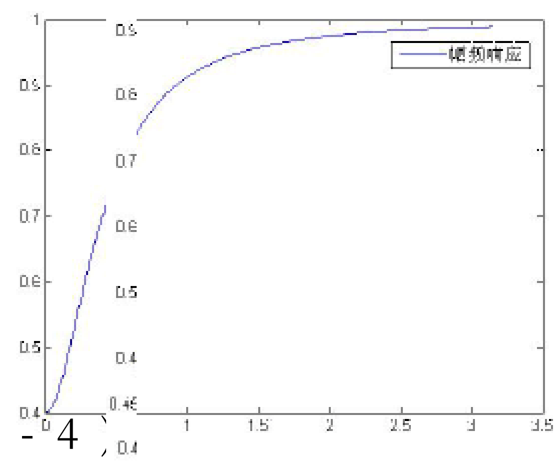
（c - 1）



（c



（c - 3）



（c - 4）

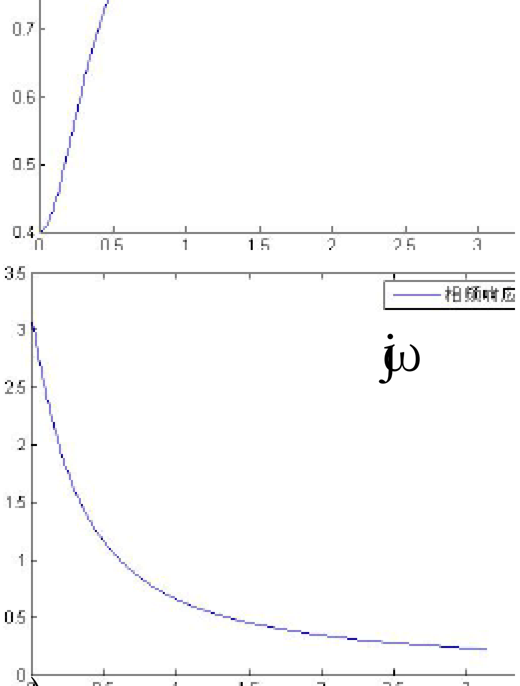
（4）由解图（d）有，

$\omega = 0$时，M_1，N_1均为最短，辐角 $\theta_1 = \varphi_1 = 0$

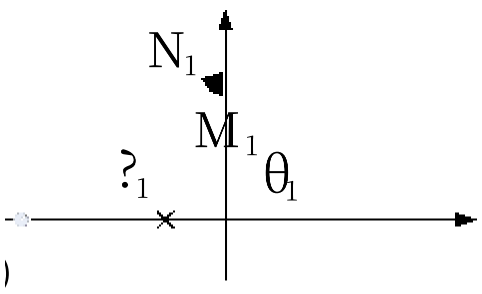
$\omega \uparrow$，则有 $M_1 \uparrow$，$N_1 \uparrow$，且有 $M_1 > N_1$，$\theta_1 \uparrow$，$\varphi_1 \uparrow$，且有 $\theta_1 > \varphi_1$

$\omega \to \infty$时，$M_1 \to \infty$，$N_1 \to \infty$，$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$，$\varphi_1 \to \frac{\pi}{2}$

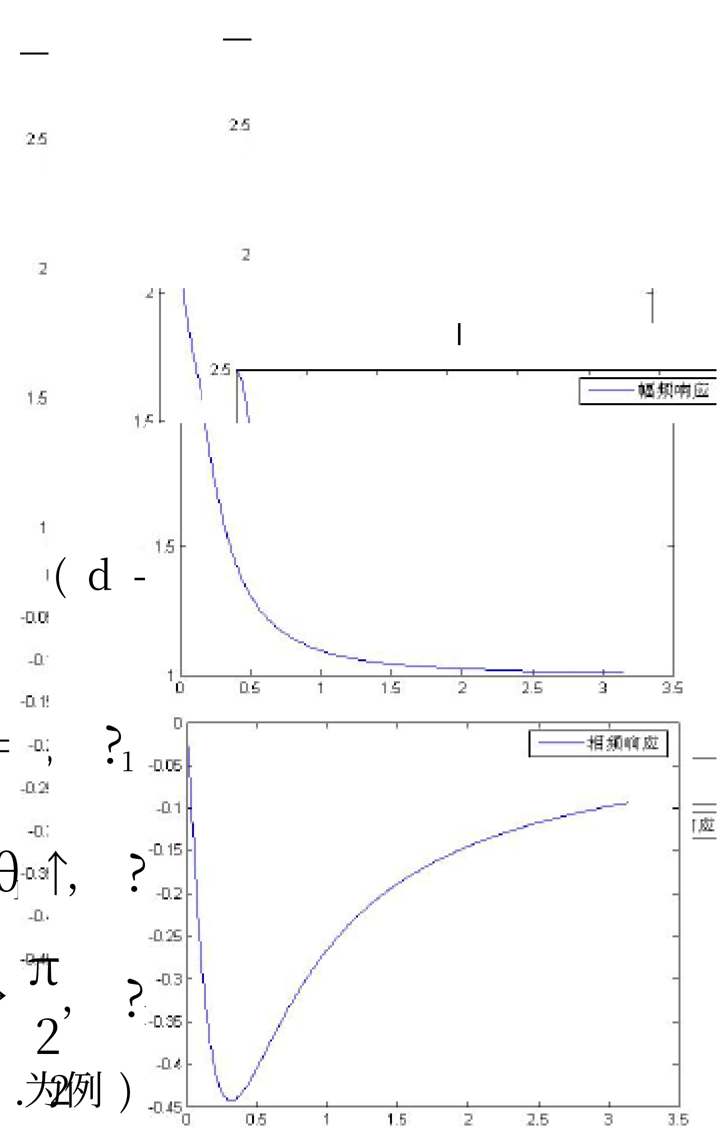
幅频、相频特性如图（以零点 -0.5，极点 -0 为例）

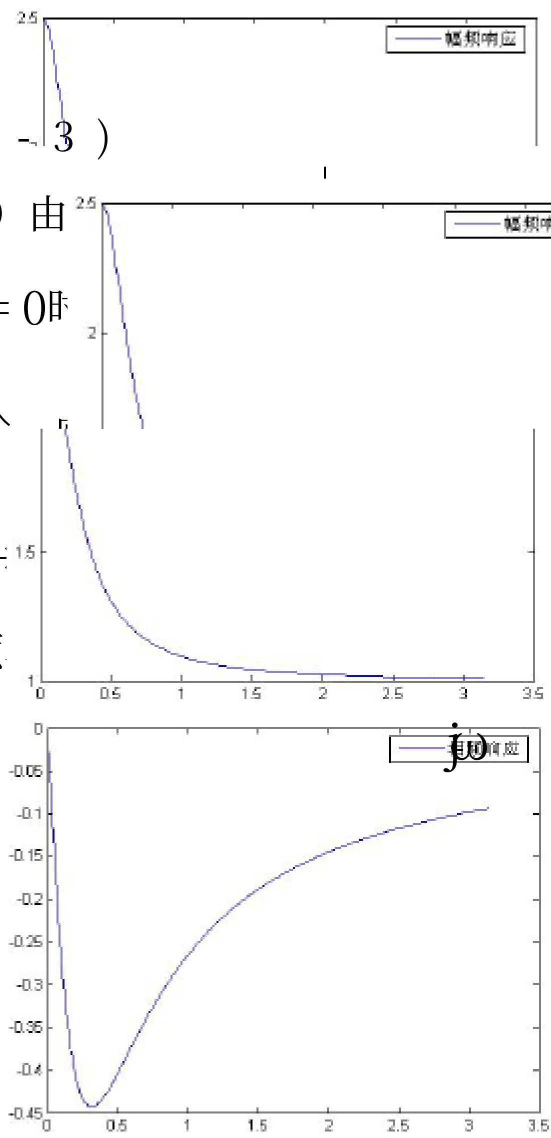


（d - 1）



（d - 2）





（d - 3）　　（d -

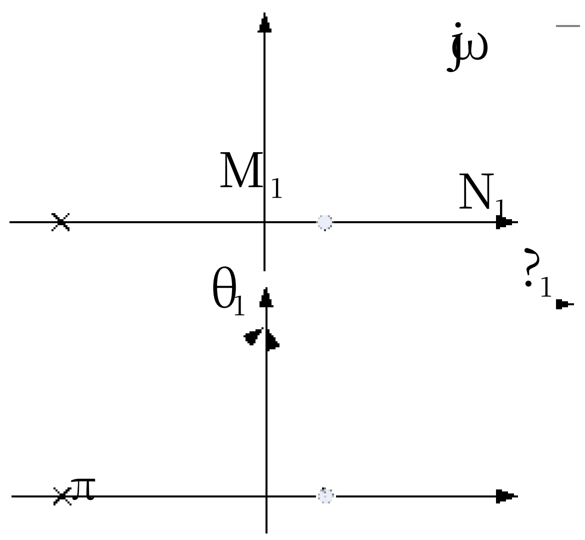
（5）由

$\omega = 0$时　$\theta_1 =$ ，?$_1$

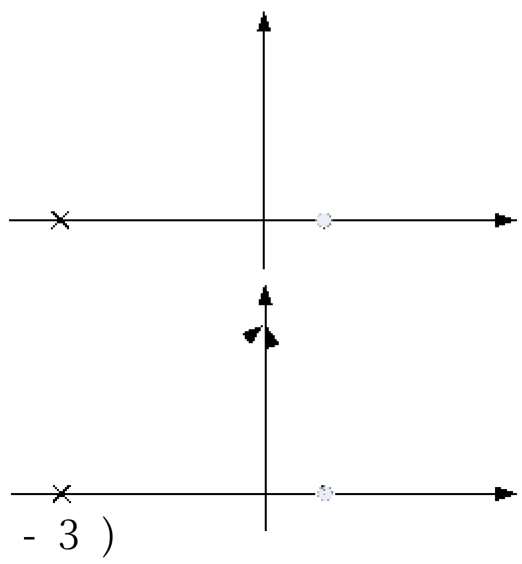
$\omega\uparrow$　N_1；$\theta_1\uparrow$，?

$\omega\to$　$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$，?

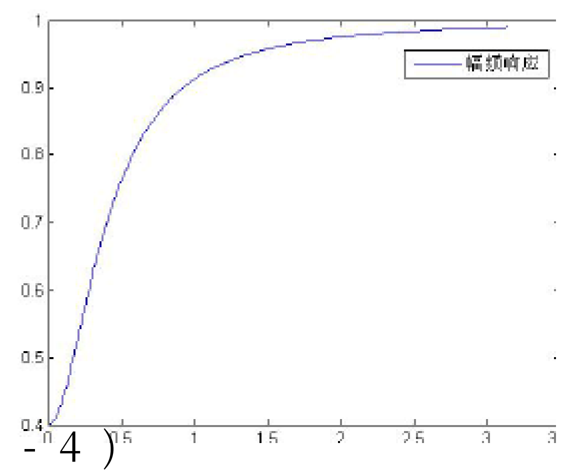
幅频　点 0 .2为例）



（e　　（e



（e - 3）



（e - 4）

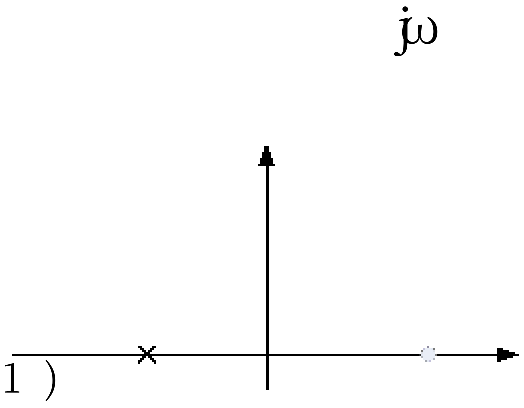
（6）由解图（e）有，

$\omega = 0$时，M_1，N_1均为最短，辐角 $\theta_1 = 0$，?$_1 = \pi$

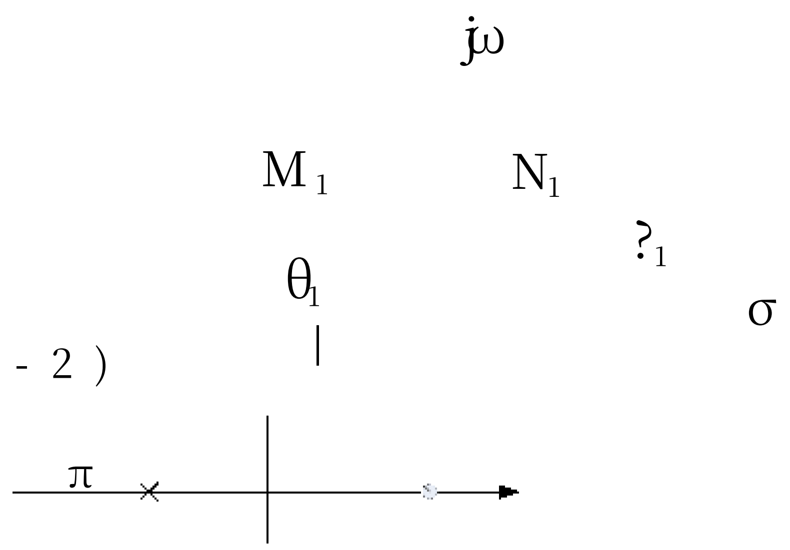
$\omega\uparrow$，则有 $M_1\uparrow$，$N_1\uparrow$，$M_1>N_1$；$\theta_1\uparrow$，$?_1\downarrow$，但相对关系与（e）中不同。

$\omega\to\infty$时，$M_1\to\infty$，$N_1\to\infty$，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$?_1\to\frac{\pi}{2}$

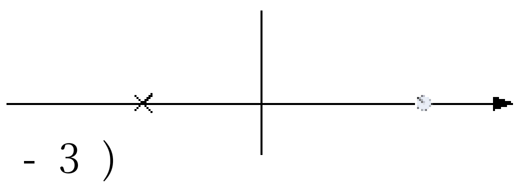
幅频、相频特性如图（以极点 -0.5，零点 0.3 为例）



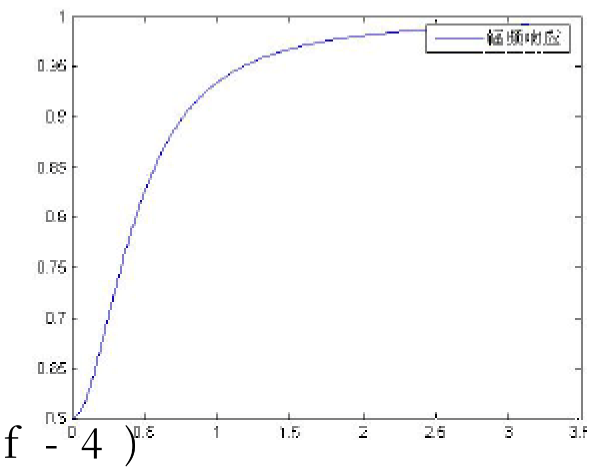
（f-1）



（f-2）



（f-3）



（f-4）

5-6 解题过程：

令 $e_1(t)=\frac{\pi}{\omega_c}\delta(t)$, $e_2(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$

$$E_1(j\omega)=F\left[e_1(t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}$$

$$E_2(j\omega)=F\left[e_2(t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

理想低通的系统函数的表达式 $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

其中 $|H(j\omega)|=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$ $\varphi(\omega)=-t_0\omega$

因此有

$$R_1(j\omega)=H(j\omega)E_1(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}e^{-jt_0\omega}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$R_2(j\omega)=H(j\omega)E_2(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}e^{-jt_0\omega}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$R_1(j\omega)=R_2(j\omega)$$

则 $F^{-1}\left[R_1(j\omega)\right]=F^{-1}\left[R_2(j\omega)\right]$

5-8 解题过程：

记 $f(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}=\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}\cdot\frac{\omega_c}{\pi}$

$$F(j\omega)=F\left[f(t)\right]=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$$

$$H(j\omega)=F\left[h(t)\right]=F\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}\right)\right]$$

$$=j\omega F(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}\cdot j\omega, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$$

故 $H(j\omega)=\begin{cases}\frac{\omega_c}{\pi}|\omega|, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$　　$\varphi(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \omega<\omega_c\\ 0, & \omega\ge\omega_c\end{cases}$

$|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 的图形如解图。

$H(j\omega)$　　$\varphi(\omega)$　$\frac{\pi}{2}$

$-\omega_c$　$\frac{\omega_c}{\pi}$　ω　ω_c

$-\omega_c$　ω_c

幅频响应　　相频响应

5-1 解题过程：

由题图 5-1 有 $v_2(t)=[v_1(t-T)-v_1(t)]*h(t)$

据时域卷积定理有 $V_2(j\omega)=[V_1(j\omega)e^{-j\omega T}-V_1(j\omega)]H(j\omega)$

（1） $v_1(t)=u(t)$

$$v_2(t)=[u(t-T)-u(t)]*h(t)$$

由 $h(t)=F^{-1}[H(j\omega)]=\frac{1}{\pi}Sa(t-t_0)$，$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$，有

$$v_2(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-T}Sa(\lambda-t_0)d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t}Sa(\lambda-t_0)d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0-T}Sa(\lambda')d\lambda'-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0}Sa(\lambda'')d\lambda''$$

又知 $S_i(y)=\int_{-\infty}^{y}Sa(x)dx$，所有

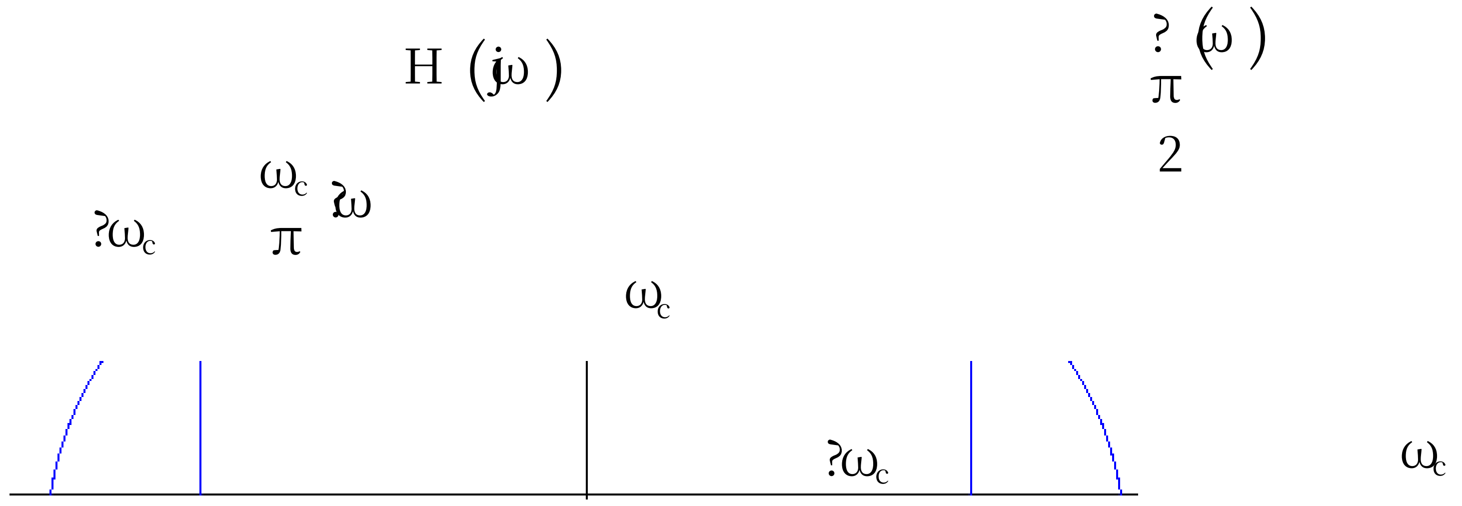
$$v_2(t)=\frac{1}{\pi}[S_i(t-t_0-T)-S_i(t-t_0)]$$

（2） $v_1(t)=\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=Sa\left(\frac{t}{2}\right)$

$$V_1(j\omega)=F[v_1(t)]=\begin{cases}2\pi & |\omega|<\frac{1}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

故 $H(j\omega)=\begin{cases}\frac{\omega_c}{\pi}\ ?\,\omega, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$ $\qquad \varphi(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$

$H(j\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 的图形如解图。



幅频响应 相频响应

5 - ? 解题过程：

由题图 5 - ? 有 $v_2(t)=[v_1(t-T)-v_1(t)]*h(t)$

据时域卷积定理有 $V_2(j\omega)=[V_1(j\omega)e^{-j\omega T}-V_1(j\omega)]H(j\omega)$

（1） $v_1(t)=u(t)$

$$v_2(t)=[u(t-T)-u(t)]*h(t)$$

由 $h(t)=F^{-1}[H(j\omega)]=\frac{1}{\pi}Sa(t-t_0)$， $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$，有

$$v_2(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-T}Sa(\lambda-t_0)d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t}Sa(\lambda-t_0)d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0-T}Sa(\lambda')d\lambda'-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0}Sa(\lambda'')d\lambda''$$

又知 $S_i(y)=\int_{-\infty}^{y}Sa(x)dx$ 所有

$$v_2(t)=\frac{1}{\pi}[S_i(t-t_0-T)-S_i(t-t_0)]$$

（2） $v_1(t)=\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=Sa\left(\frac{t}{2}\right)$

$$V_1(j\omega)=F[v_1(t)]=\begin{cases}2\pi, & |\omega|<\frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

5－20解题过程：

（1）系统输入信号为 $\delta(t)$ 时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$ 就是 $h_i(t)$

即 $$h(t)=F^{-1}\left[H_i(j\omega)\right]=\frac{\sin\left[2\Omega(t-t_0)\right]}{\pi(t-t_0)}$$

（2）输入信号与 $\cos(\omega_0 t)$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由 $H_i(j\omega)$ 的表达式可知 $\omega_0\gg\Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $$r(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$$

（3）输入信号 $e(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega(t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0\gg\Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_i(t)$ 所以该系统是线性时变的。

5-24解题过程：

（1）系统输入信号为 $\delta(t)$ 时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$ 就是 $h_1(t)$

即 $h(t)=F^{-1}[H_i(j\omega)]=\dfrac{\sin[\Omega(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)}$

（2）输入信号与 $\cos(\omega_0 t)$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由 $H_i(j\omega)$ 的表达式可知 $\omega_0\gg\Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $r(t)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$

（3）输入信号 $e(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0\gg\Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_1(t)$ 所以该系统是线性时变的。

5 - 24 解题过程：

（1）系统输入信号为 $\delta(t)$ 时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$ 就是 $h_1(t)$

即 $$h(t)=F^{-1}\left[H_i(j\omega)\right]=\frac{\sin\left[2\Omega(t-t_0)\right]}{\pi(t-t_0)}$$

（2）输入信号与 $\cos(\omega_0 t)$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由 $H_i(j\omega)$ 的表达式可知 $\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $$r(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$$

（3）输入信号 $e(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_1(t)$ 所以该系统是线性时变的。

5 - 20 解题过程：

（1）系统输入信号为 $\delta(t)$ 时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$ 就是 $h_1(t)$

即 $h(t)=F^{-1}\left[H_i(j\omega)\right]=\dfrac{\sin\left[\Omega(t-t_0)\right]}{\pi(t-t_0)}$

（2）输入信号与 $\cos(\omega_0 t)$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由 $H_i(j\omega)$ 的表达式可知 $\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $r(t)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$

（3）输入信号 $e(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega(t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_1(t)$ 所以该系统是线性时变的。

5 - 20 解题过程：

（1）系统输入信号为 $\delta(t)$ 时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$ 就是 $h_1(t)$

即 $$h(t)=F^{-1}\left[H_i(j\omega)\right]=\frac{\sin\left[2\Omega(t-t_0)\right]}{\pi(t-t_0)}$$

（2）输入信号与 $\cos(\omega_0 t)$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由 $H_i(j\omega)$ 的表达式可知 $\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $$r(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$$

（3）输入信号 $e(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega(t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0 \gg \Omega$ 时，载波为 $2\omega_0$ 的频率成分被滤除

故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_1(t)$ 所以该系统是线性时变的。

取一个周期 $(0,T)$，其中 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则 $\sin(2\omega t)$ 在 $(0,T)$ 内积分为零，有

$$E=\int_0^T\left[1+\sin(2\omega t)\right]dt=T$$

当 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 分别作用于单位电阻时各自产生的能量为（仍取 $(0,T)$ 内）

$$E_1=\int_0^T\cos^2(\omega t)\,dt=\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$E_2=\int_0^T\sin^2(\omega t)\,dt=\int_0^T\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

故 $$E_1+E_2=T$$

即两信号同时作用于单位电阻所产生的能量等于 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别作用时产生的能量之和。当 $f_1(t)=\cos(\omega t)$、$f_2(t)=\cos(\omega t+45^\circ)$ 时，同时作用时有

$$E=\int_0^T\left[\cos(\omega t)+\cos(\omega t+45^\circ)\right]^2dt$$
$$=\int_0^T\left[2\cos\left(\frac{\omega t+\omega t+45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t-\omega t-45^\circ}{2}\right)\right]^2dt$$
$$=4\cos^2\frac{\pi}{8}\int_0^T\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)dt$$
$$=2T\cos^2\frac{\pi}{8}$$

分开作用时

$$E_1=\int_0^T\cos^2(\omega t)\,dt=\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$E_2=\int_0^T\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int_0^T\frac{1+\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}dt$$
$$=\int_0^T\frac{1-\sin(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$E_1+E_2\neq E$$

即当 $f_1(t)=\cos(\omega t)$、$f_2(t)=\cos(\omega t+45^\circ)$ 时上述结论不成立，其原因是 $\cos(\omega t)$ 和 $\cos(\omega t+45^\circ)$ 相互间不满足正交关系，而 $\cos(\omega t)$ 和 $\sin(\omega t)$ 满足正交关系。

6-16 解题过程：

（1） $E=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\,dt=\frac{1}{2a}<\infty$

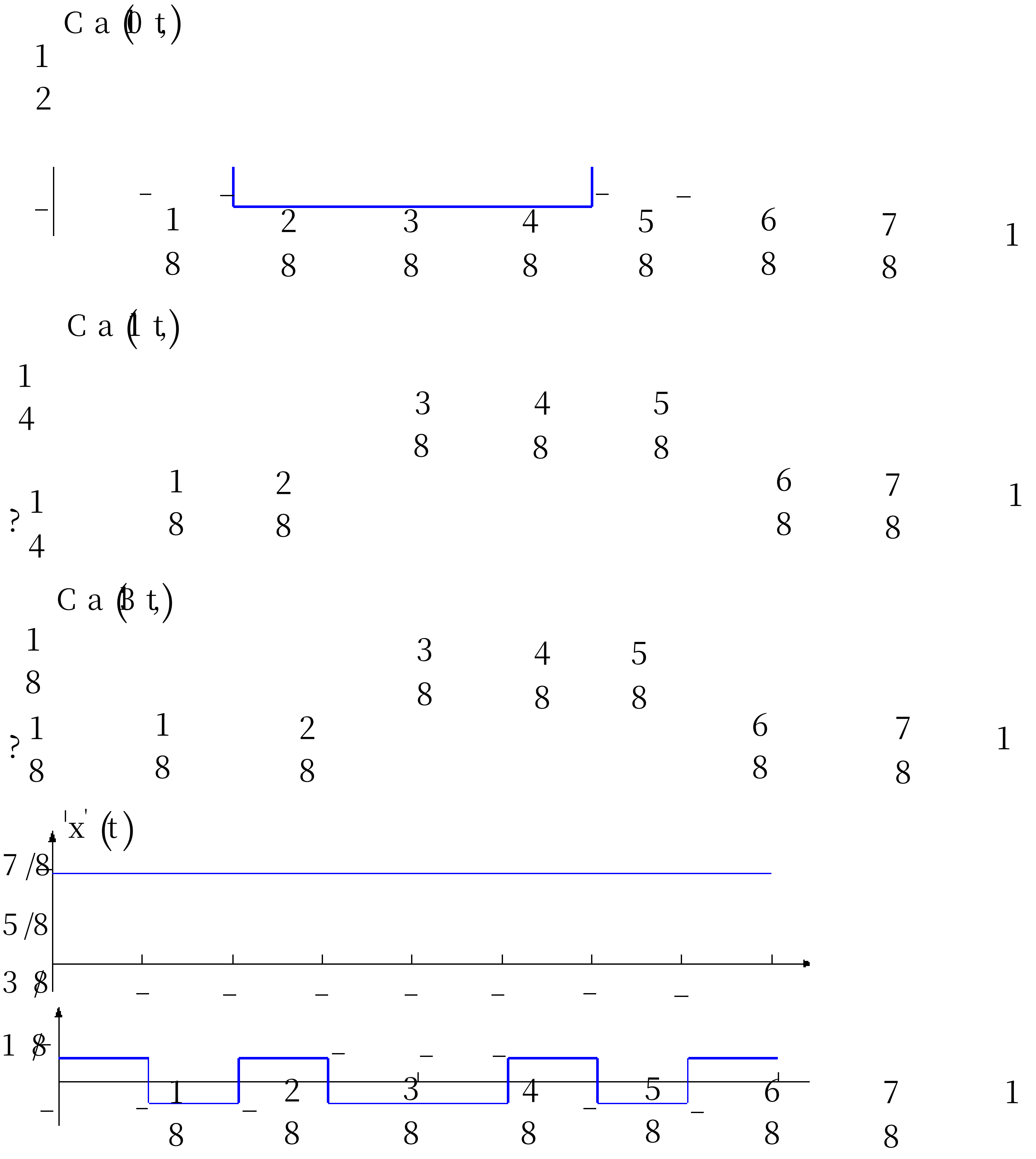
则 $f(t)=e^{-at}u(t)$ 为能量函数。

由 $F(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$ 得

$$F\{R(\tau)\}=\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

所以 $$R(\tau)=F^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+\omega^2}\right\}=\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}$$

（2） 对周期余弦函数 $f_1(t)=E\cos\omega_0 t$ 有



$$R_1(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t-\tau)\,dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f_1(t)f_1(t-\tau)\,dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t-\tau)\,dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t+\tau)\,dt\right]$$

$$=\frac{E^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

又 $f(t)=E\cos(\omega_0 t)u(t)=f_1(t)u(t)$

则有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t+\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_1(t+\tau)\,dt$$

所以 $R(\tau)=\frac{E^2}{4}\cos\omega_0\tau$

6-17 解题

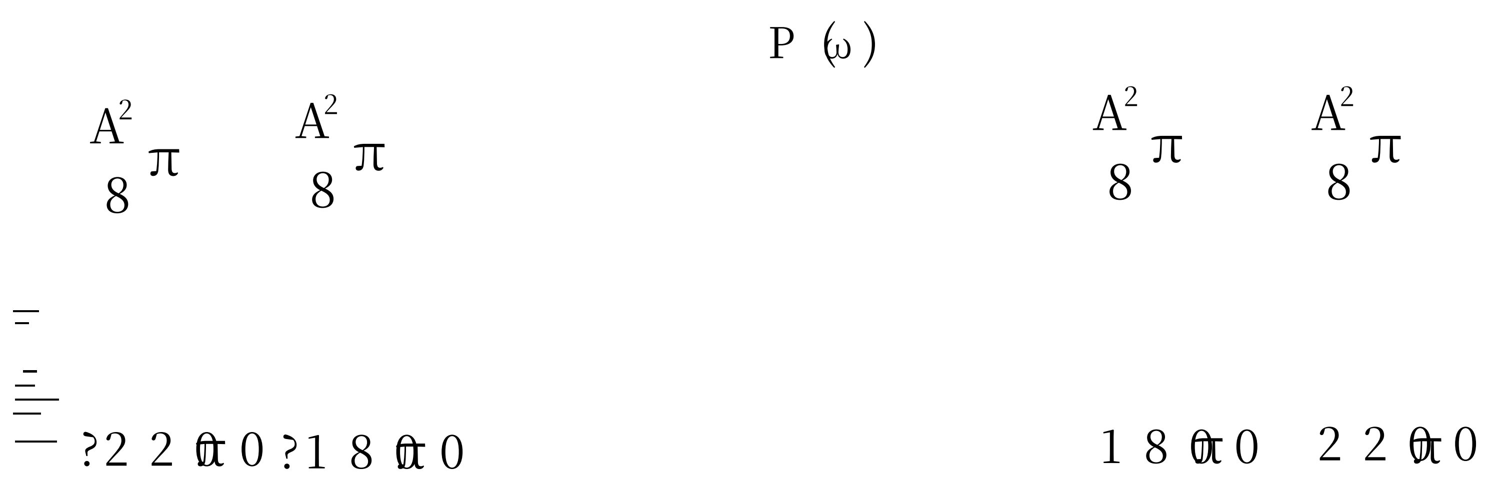
（4） $f(t)=\frac{A}{2}\left[\sin(220\pi t)-\sin(180\pi t)\right]$

所以 $P=\frac{A^2}{8}+\frac{A^2}{8}=\frac{A^2}{4}$

功率谱

$$P(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+220\pi)+\delta(\omega-220\pi)+\delta(\omega+180\pi)+\delta(\omega-180\pi)\right]$$

功率谱如图所示



(6) $f(t)=A\cdot\dfrac{1-\cos(40\pi t)}{2}\cos(200\pi t)$

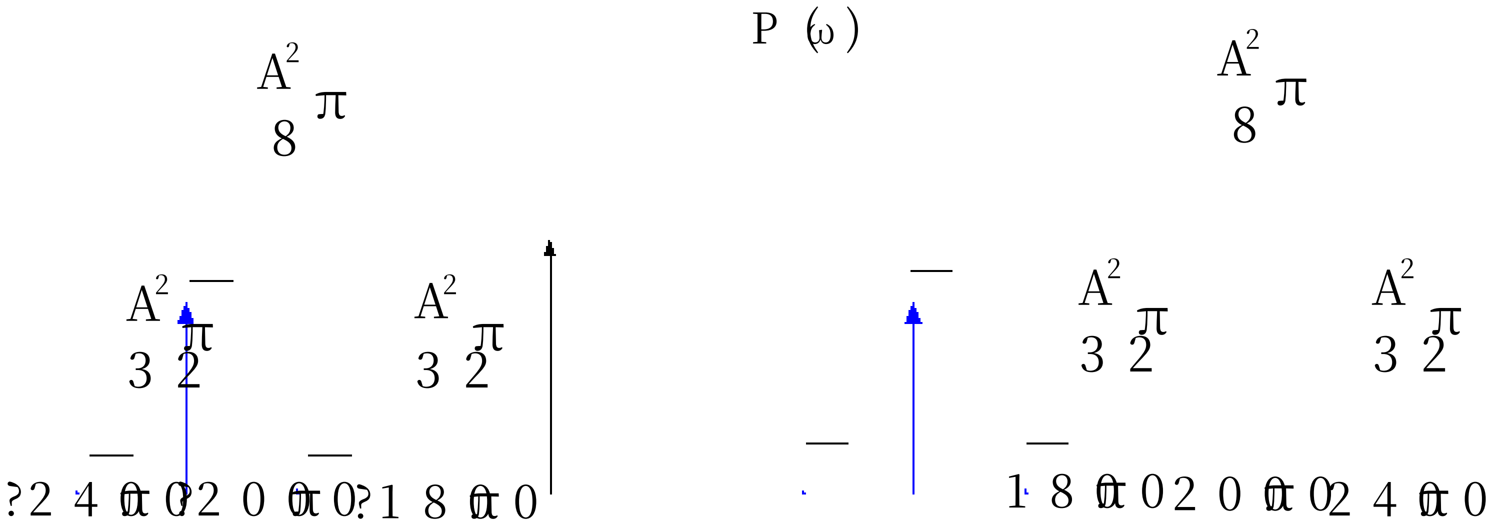
$$=\frac{A}{2}\cos(200\pi t)-\frac{A}{4}\left[\cos(240\pi t)+\cos(160\pi t)\right]$$

所以 $P=\dfrac{A^2}{8}+\dfrac{A^2}{16}=\dfrac{3A^2}{16}$

功率谱

$$P(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+200\pi)+\delta(\omega-200\pi)\right]+$$
$$\frac{A^2}{32}\pi\left[\delta(\omega+240\pi)+\delta(\omega-240\pi)+\delta(\omega+160\pi)+\delta(\omega-160\pi)\right]$$

功率谱如图所示



6-21 解题过程：

(1) $r(t)=f(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(T+\tau-t)d\tau$$

(2) $t=T$ 时，$r(t)=r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$

(3) 由题图 6-21 可知

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

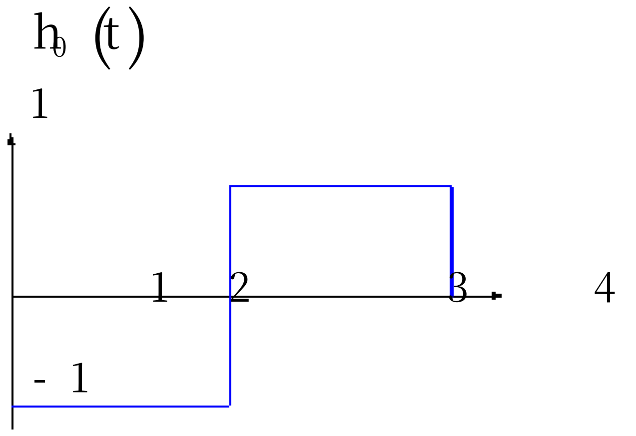
又冲激响应 $h(t)=s(T-t)$ 是信号 $s(t)$ 的匹配滤波器冲激响应，则 $s(t)=0,\quad t>T$

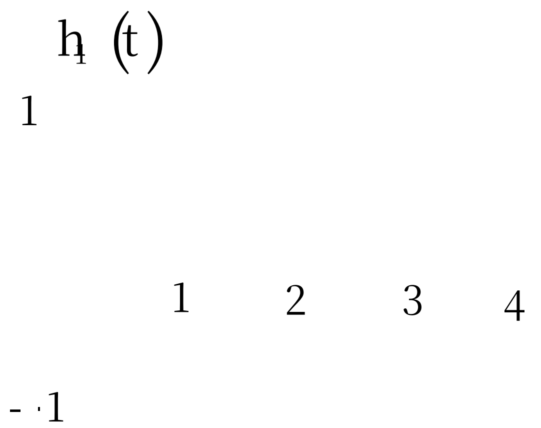
所以第（2）题中

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{T}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

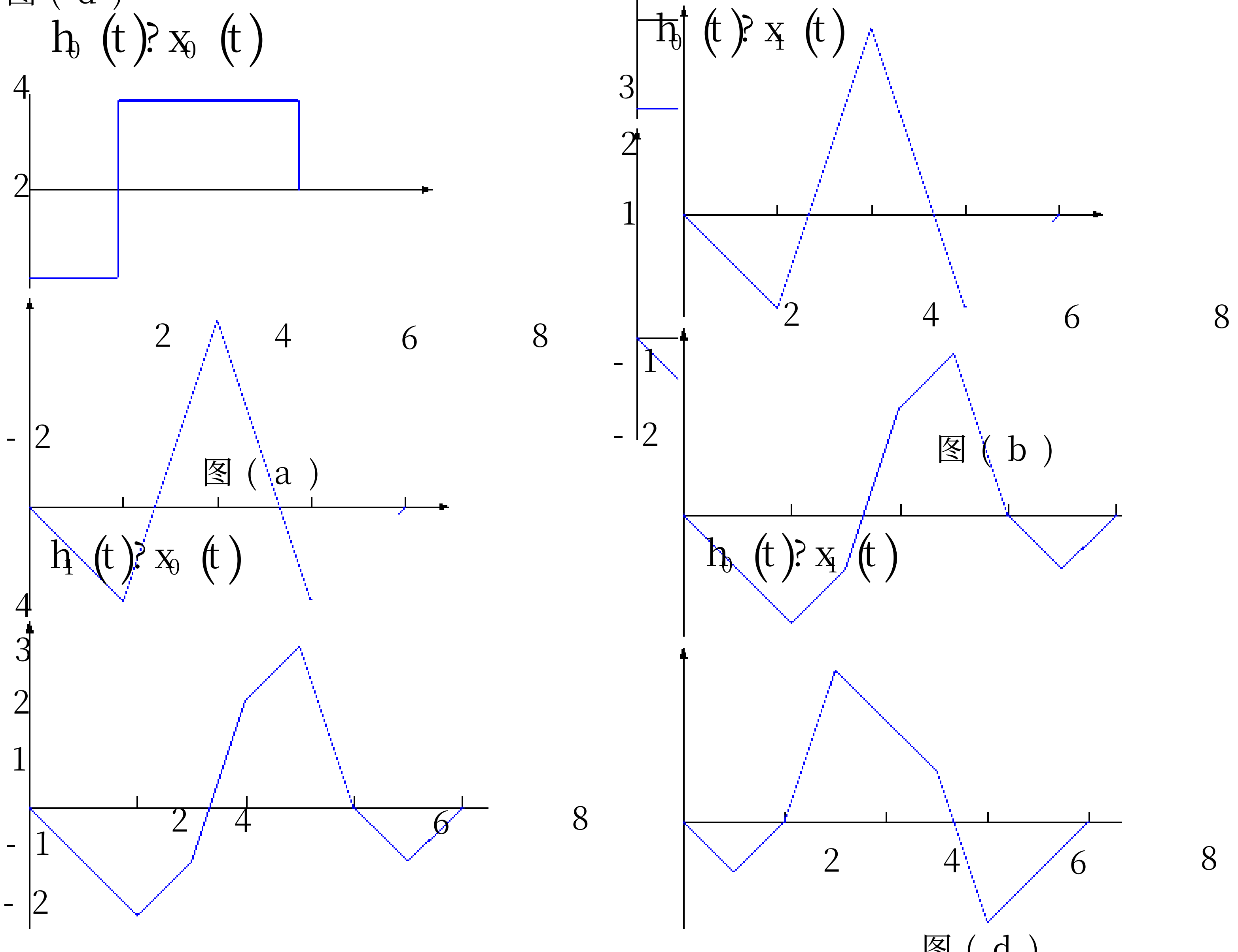
6－22 解题过程：

（1） $h_0(t)=x_0(T-t)$ 　$h_1(t)=x_1(T-t)$ 波形如下图





（2） M_0对 x_0的响应波形： $h_0(t)*x_0(t)$如图（a）；M_0对 x_1的响应波形： $h_0(t)*x_1(t)$如图（b）；M_1对 x_0的响应波形： $h_1(t)*x_0(t)$如图（c）；M_1对 x_1的响应波形： $h_1(t)*x_1(t)$如图（d）



图（a）　图（b）　图（c）　图（d）

（3）由题图可知， M_0在 $t=4$时 $x_0(t)$的响应输出为 4，对 $x_1(t)$的响应输出为 2； M_1在 $t=4$时对 $x_0(t)$的响应输出为 2，对 $x_1(t)$的输出响应为 4。若使 $x_0(t)$与 $x_1(t)$正交，将 $x_0(t)$改为如下图（a），则 M_0为下图（b）所示。此时 M_0为 $x_1(t)$的响应输出如下图（c）所示， M_1为 $x_0(t)$的输出如下图（d）。在 $t=4$时， M_0对 $x_1(t)$和 M_1对 $x_0(t)$的响应为零。

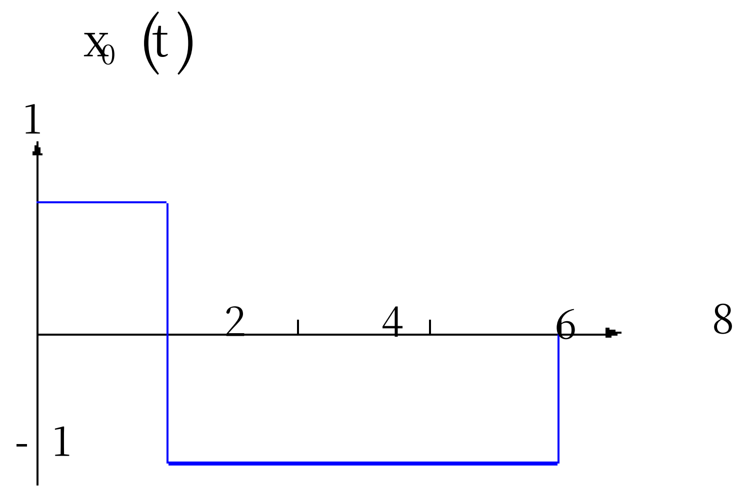


图 （a）

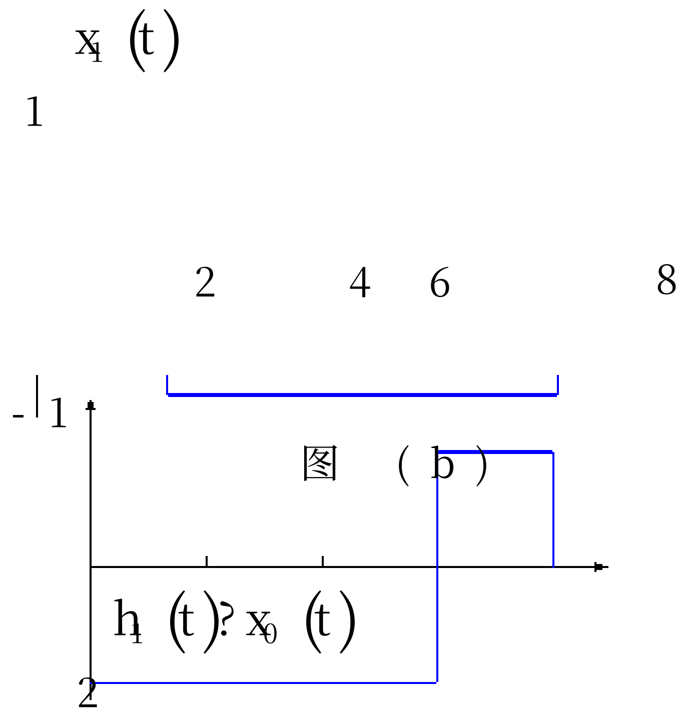


图 （b）

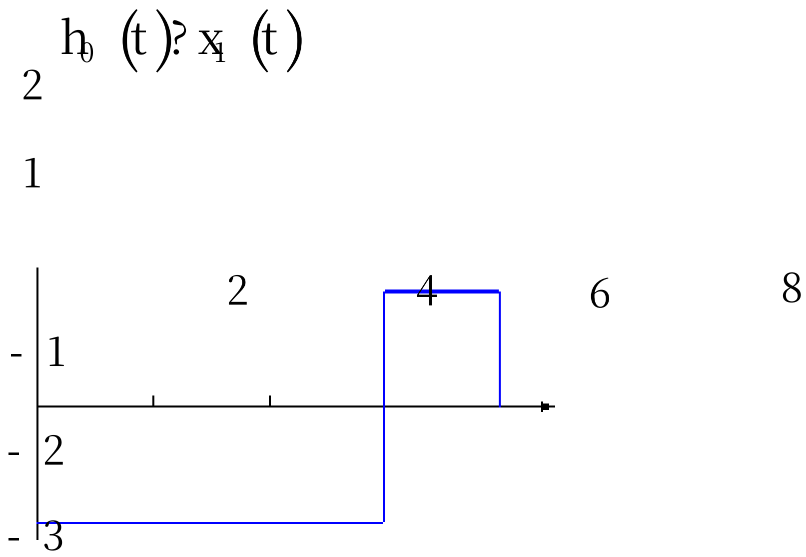


图 （c）

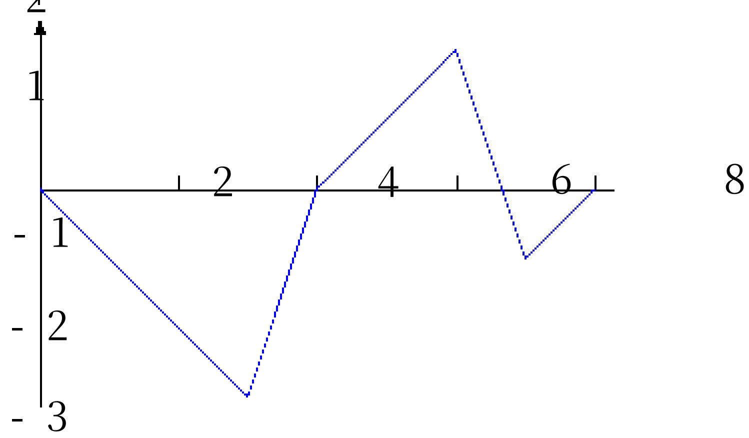
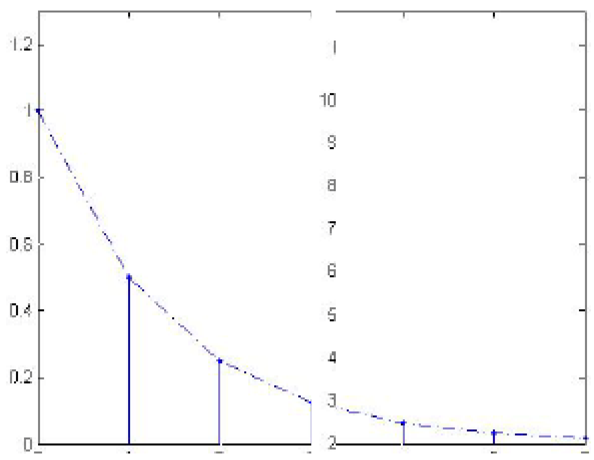
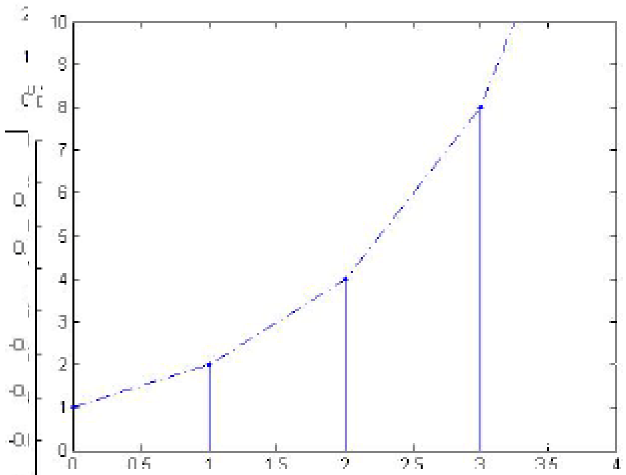


图 （d）

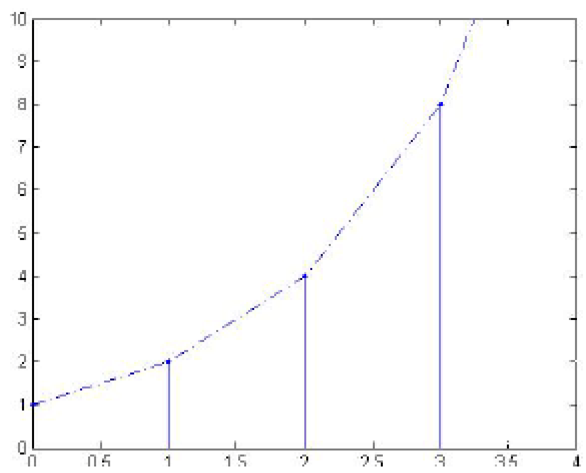
7-1解题过程：(1) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

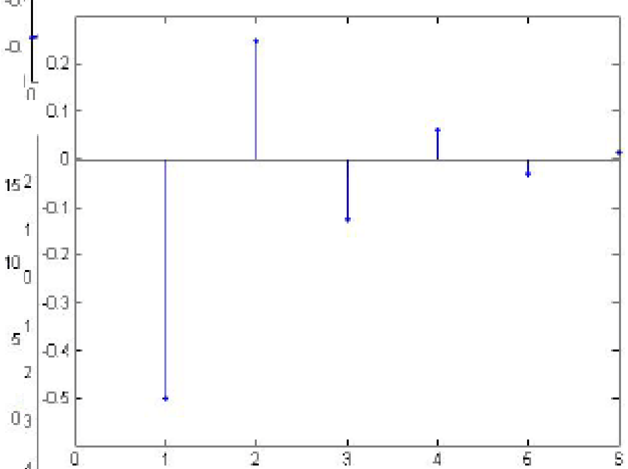


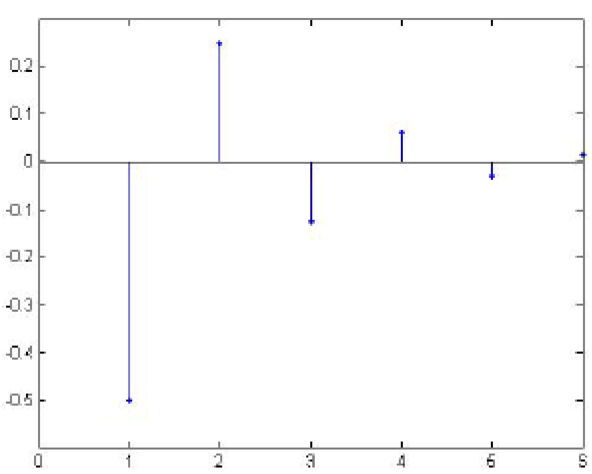
(2) $x(n)=2^n u(n)$

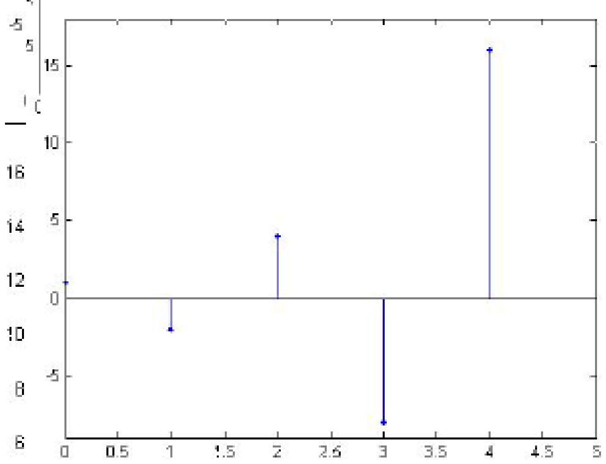


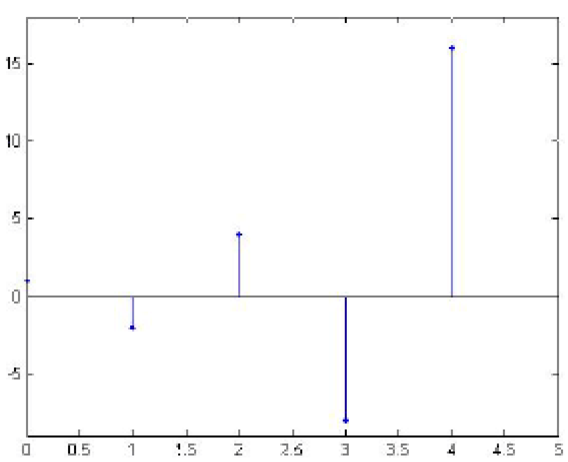
(3) $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

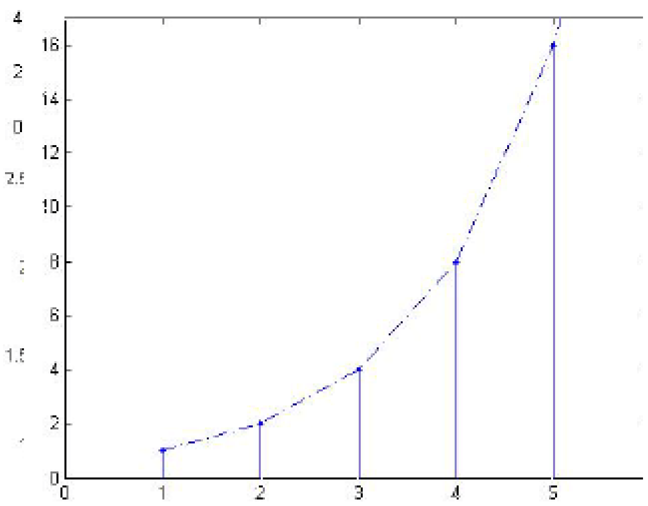












7-3解题过程：由图可得系统误差方程为

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

(1) $x(n)=\delta(n)$

7-1 解题过程：（1） $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$　　（2） $x(n)=2^{n}u(n)$

（3） $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$　　（4） $x(n)=(-2)^{n}u(n)$

（5） $x(n)=2^{n-1}u(n-1)$　　（6） $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$

7-3 解题过程：由图可得系统误差方程为

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

（1） $x(n)=\delta(n)$

$$y(n)=\frac{3-3^n}{2}[u(n)-u(n-5)]+\frac{1}{8}\left(\frac{2-1}{1-3}\right)^{n-4}u(n-5)$$

$$=\frac{3-3^n}{2}[u(n)-u(n-5)]+\frac{121}{3^n}u(n-5)$$

7 - 解题过程：

围绕相加器给出

$$y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

整理的差分方程为

$$y(n)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

这是二阶差分方程。

7 - 30 解题过程：

（1）单位冲激信号 $\delta(n)$ 可表示为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

系统对 $u(n)$ 的响应是 $g(n)$，又由系统的线性时不变特性可得

对 $u(n-1)$ 的响应是 $g(n-1)$，故系统得冲激响应

$$h(n)=g(n)-g(n-1)$$

（2）单位阶跃信号 $u(n)$ 可表示为

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

有系统的线性时不变特性可得对 $\delta(n-k)$ 的响应为 $h(n-k)$。

故阶跃响应 $g(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$

7 - 32 解题过程：

（1） $y(n)=[x(n)-h_1(n)]-h_2(n)$

$$y(n)=\frac{3-3^{n}}{2}\left[u(n)-u(n-5)\right]+\frac{1}{8}\left(\frac{2-1}{1-3}\right)^{n-4}u(n-5)$$

$$=\frac{3-3^{n}}{2}\left[u(n)-u(n-5)\right]+\frac{1-2\ 1}{3^{n}}u(n-5)$$

7-9解题过程：

围绕相加器给出

$$y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

整理的差分方程为

$$y(n)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

这是二阶差分方程。

7-30解题过程：

（1）单位冲激信号 $\delta(n)$ 可表示为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

系统对 $u(n)$ 的响应是 $g(n)$，又由系统的线性时不变特性可得

对 $u(n-1)$ 的响应是 $g(n-1)$，故系统得冲激响应

$$h(n)=g(n)-g(n-1)$$

（2）单位阶跃信号 $u(n)$ 可表示为

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

有系统的线性时不变特性可得对 $\delta(n-k)$ 的响应为 $h(n-k)$。

故阶跃响应 $g(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$

7-33解题过程：

（1） $y(n)=\left[x(n)-h_1(n)\right]-h_2(n)$

8 -解题过程：

（1） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\quad\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$

（2） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}z^{-n}=\frac{z}{z+\frac{1}{4}}\quad\left(|z|>\frac{1}{4}\right)$

（3） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\cdots\quad(|z|>3)$

（4） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-n}=-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\quad\left(|z|<\frac{1}{3}\right)$

（5） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-(2z)^{n}$

$=1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^{n}=1-\frac{1}{1-2z}=\frac{-2z}{1-2z}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\quad\left(|z|<\frac{1}{2}\right)$

（6） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}=z\quad(|z|<+\infty)$

（7） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[u(n)-u(n-10)\right]z^{-n}=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad(|z|>0)$

由于 $\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{z^{9}\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ 故极点为 $z=0$（9阶）， $z=\frac{1}{2}$（1阶）

零点由 $z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0$ 可求得。

令 $z=re^{j\omega}$ 代入有

$$\left(re^{j\omega}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}e^{j2k\pi} \text{ 于是 } re^{j\omega}=\frac{1}{2}e^{j\frac{2k\pi}{10}}\quad(k=0,1,2,\cdots,9)$$

所以零点 $z=\frac{1}{2}e^{j\frac{2k\pi}{10}}\quad(k=0,1,2,\cdots,9)$

又 $z=\frac{1}{2}$ 出零极点抵消，故收敛域为 $|z|>0$。

（8） $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)\right]z^{-n}$$

$$=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{z\left(2z-\frac{5}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\quad\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$$

（9） $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(n)-\frac{1}{8}\delta(n-3)\right]z^{-n}=1-\frac{1}{8}z^{-3}\quad(|z|>0)$$

8-解题过程：

（1） $X(z)=\frac{z}{z+0.5}$ $\qquad x(n)=(-0.5)^{n}u(n)$

（2） $$X(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$=\frac{1-0.5z^{-1}}{\frac{1}{8}\left(z^{-1}+2\right)\left(z^{-1}+4\right)}$$

$$=\frac{8}{z^{-1}+2}-\frac{12}{z^{-1}+4}$$

$$=\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=\frac{4z}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3z}{z+\frac{1}{4}}$$

$$x(n)=\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

（3） $$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

（4）

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}=\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}-a$$

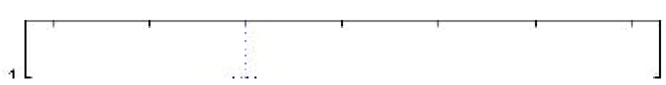
$$x(n)=\frac{a^2-1}{a}$$

8 - 12 解题过程

由于 $$X(z)=\frac{-3z}{2z^2-5z+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

零极点如图所示



解图 8 - 12

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-2}$$

当 $|z| > 2$ 时为右边序列 $x(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n\right]u(n)$

当 $|z| < 0.5$ 时为左边序列 $x(n) = \left[2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$

当 $0.5 < |z| < 2$ 时为右边序列 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$

8-18 解题过程：

因为 $H(z) = Z[h(n)] = \frac{z}{z-a}$，$|z| > a$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a}\cdot\frac{z-z^{1-N}}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{a}{z-a}\right](1-z^{-N}) \quad (|z|>1)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a}\right](1-z^{-N})$$

由于 $y(n)$ 是因果序列，据移位性质

$$y(n) = Z^{-1}[Y(z)] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) - \frac{1-a^{n+1-N}}{1-a}u(n-N)$$

8-25 解题过程：

由图得 $y(n) = b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + a\,x(n-1)$

设系统是因果系统，对差分方程两边取 z 变换：

$$Y(z) = b_1 z^{-1}Y(z) + b_2 z^{-2}Y(z) + a z^{-1}X(z)$$

系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{az^{-1}}{1-b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}=\frac{az}{z^2-b_1z-b_2}$

单位样值响应

$$h(n)=Z^{-1}\left[H(z)\right]=Z^{-1}\left[\frac{az}{z^2-b_1z-b_2}\right]$$

$$=Z^{-1}\left[\frac{a}{p_1-p_2}\left(\frac{z}{z-p_1}-\frac{z}{z-p_2}\right)\right]=\frac{a}{p_1-p_2}\left(p_1^n-p_2^n\right)u(n)$$

其中 p_1，p_2 为 $H(z)$ 的极点

$$p_1=\frac{b_1+\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}，\quad p_2=\frac{b_1-\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}$$

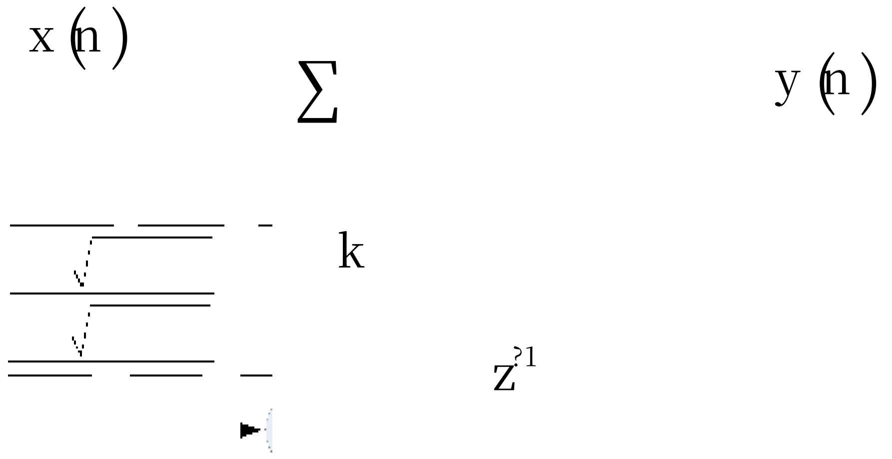
8-3解题过程：

（1）$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{z-k}=\frac{1}{1-kz^{-1}}\Rightarrow\left(1-kz^{-1}\right)Y(z)=X(z)$

两边取逆 z 变换可得差分方程

$$y(n)-ky(n-1)=x(n)$$

（2）由差分方程可得系统结构图如下：



（3）系统频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{1-ke^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-k\cos\omega)+jk\sin\omega}$$

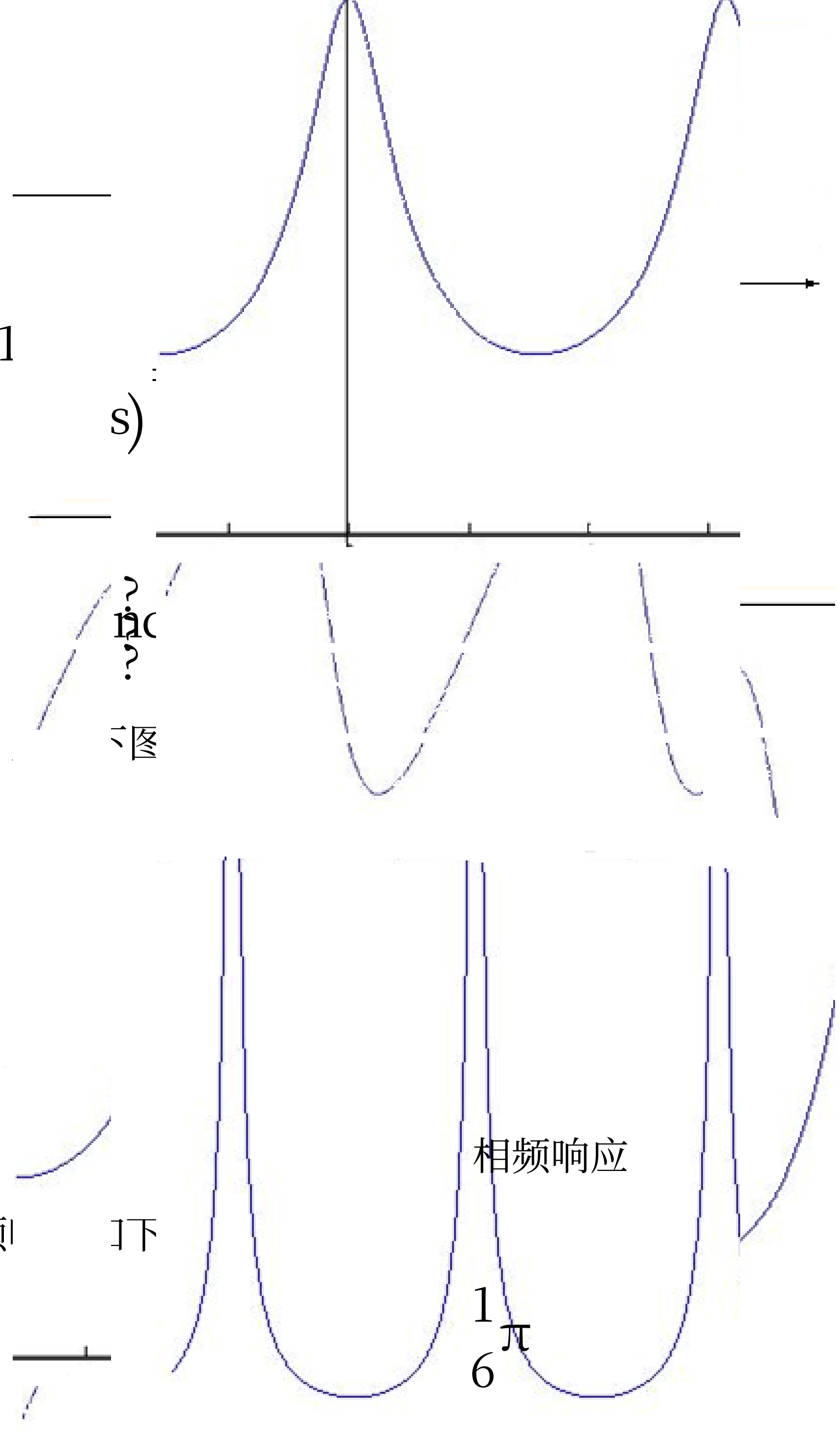
故幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\omega}}$

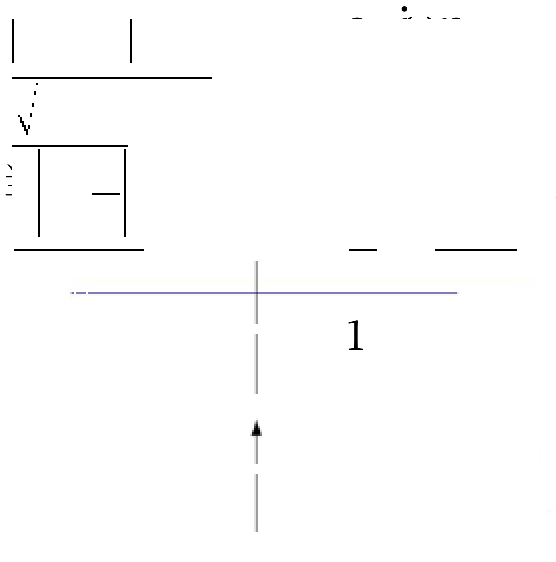
相位响应 $\varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{k\sin\omega}{1-k\cos\omega}$

① $k=1$，$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$，

② $k=0.5$，$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1.25-\cos\omega}}$，$\varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{2-\cos\omega}$

③ $k = 1$, $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \dfrac{1}{2(1 ? \quad s)}$

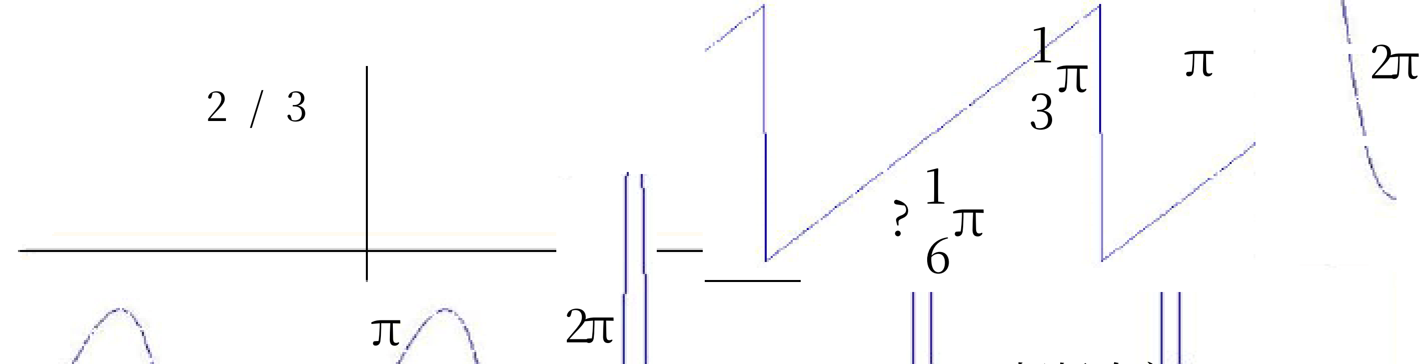




幅频响应

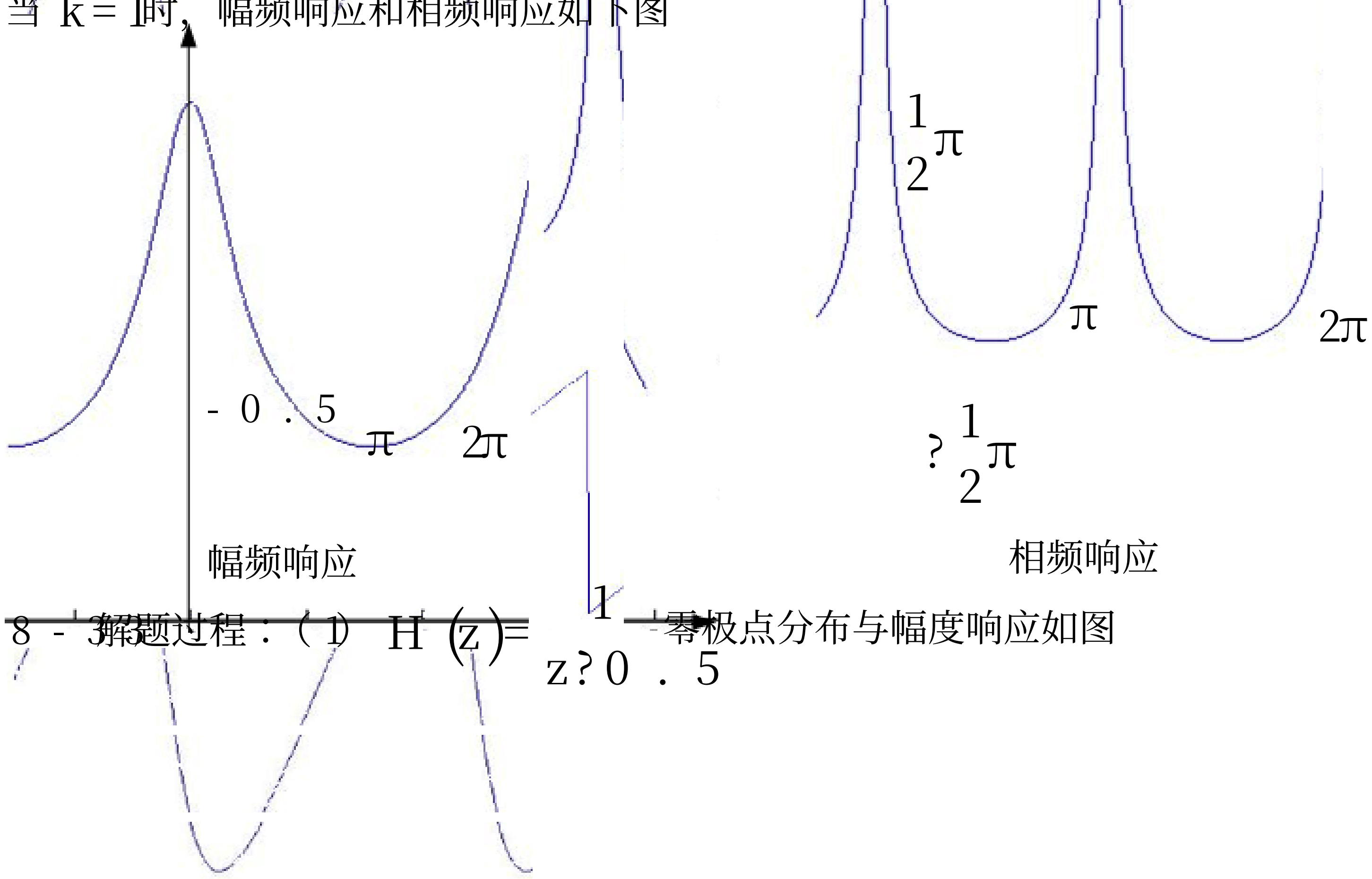
当 $k = 0$.时5, 幅频响应和相频]下

2



幅频响应

当 $k = 1$时，幅频响应和相频响应如下图



幅频响应　　　　相频响应

8 - 3解题过程：（1）$H(z) = \dfrac{1}{z ? 0.5}$ 零极点分布与幅度响应如图

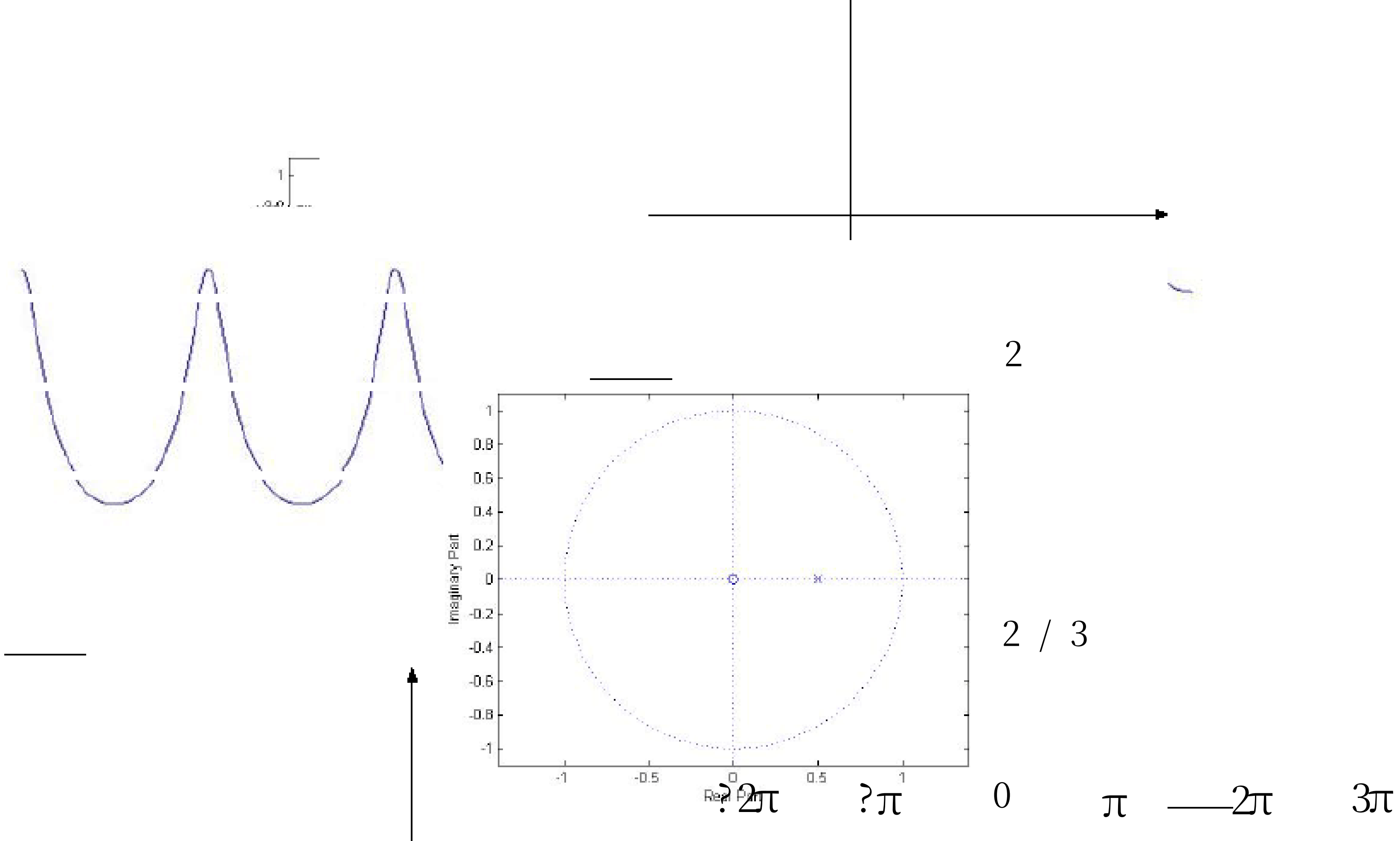


图 8-33 零极点分布　　　　图 8-33 幅度响应

点，幅度响应不

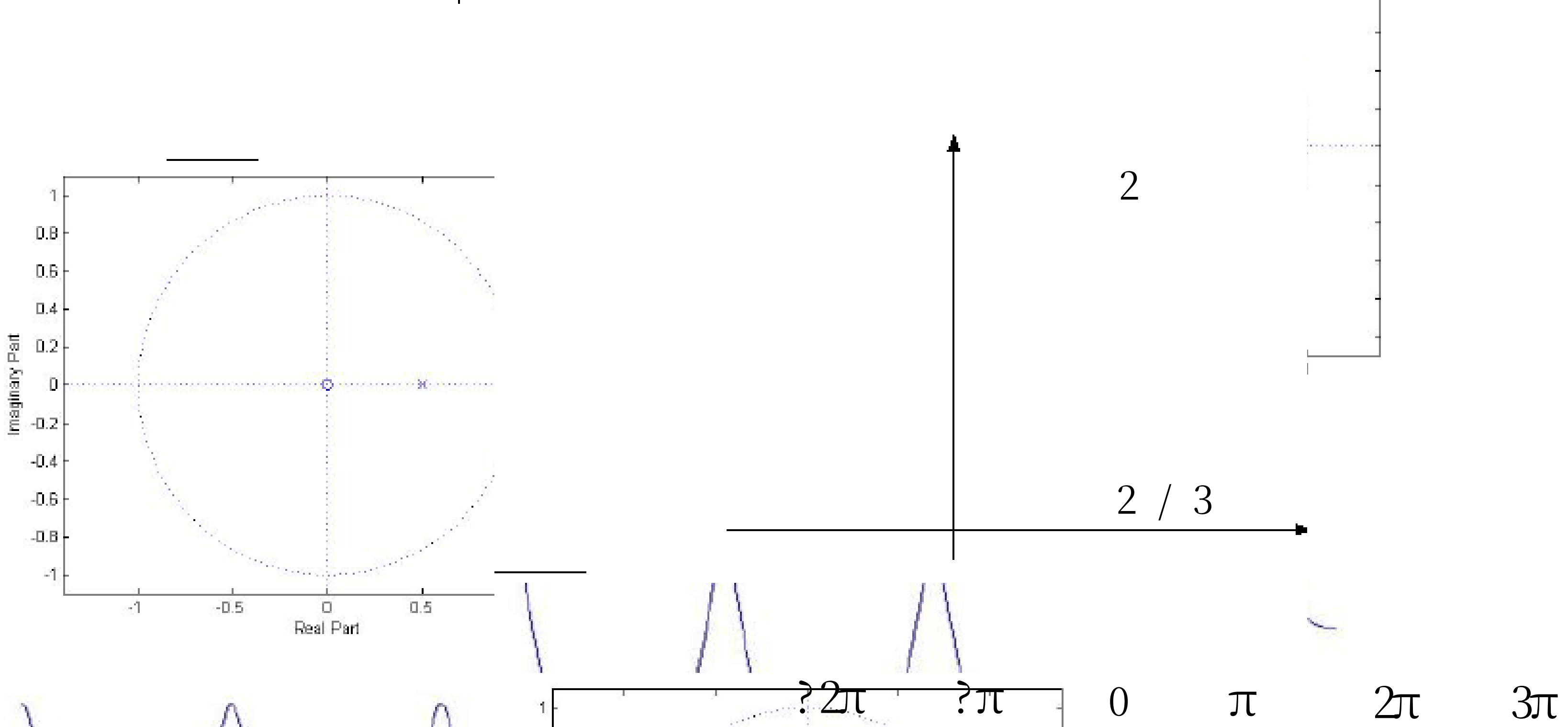
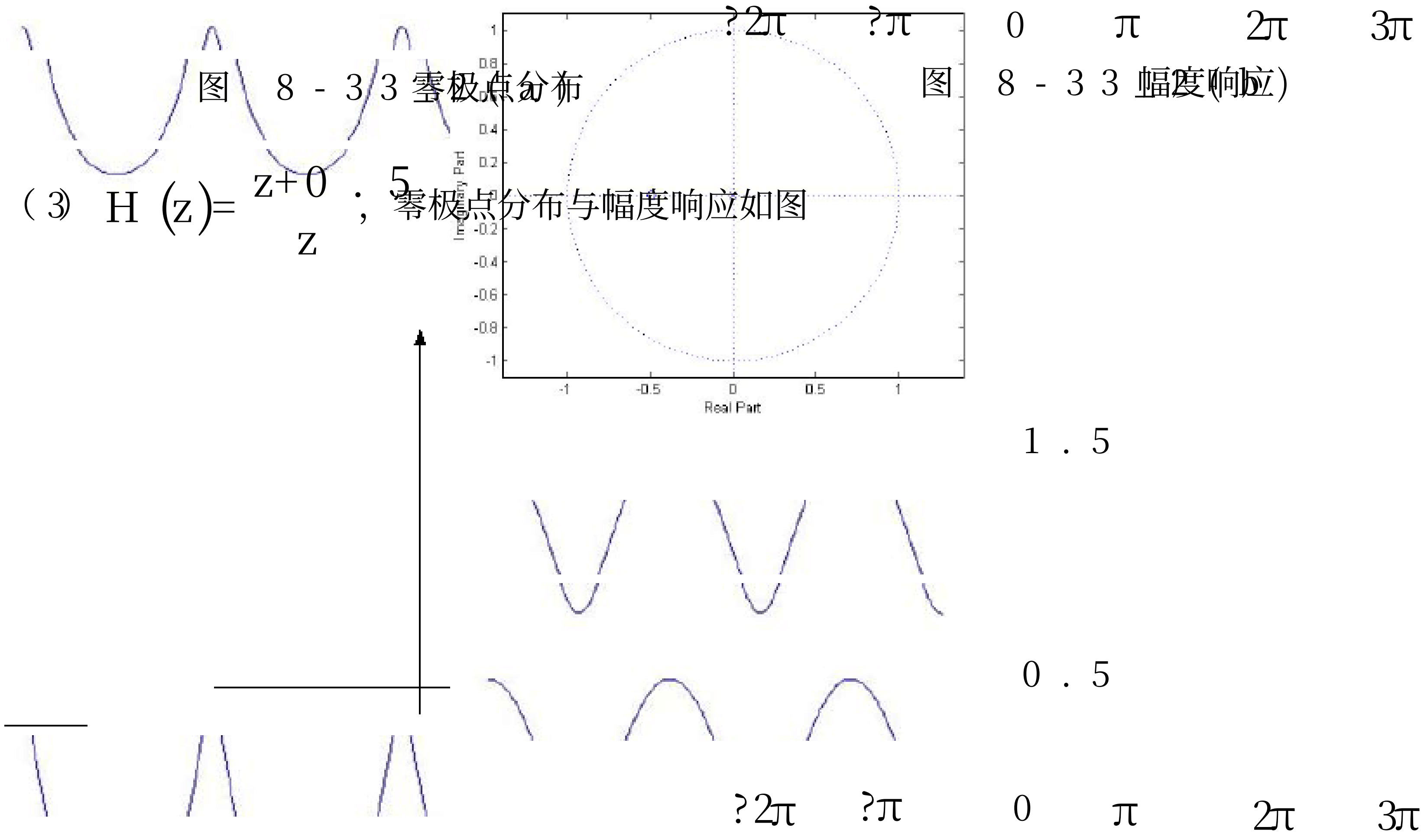


图 8-33 零极点分布　　　　图 8-33 幅度响应

(3) $H(z)=\frac{z+0.5}{z}$；零极点分布与幅度响应如图



8-3解题过程：

（1） $y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$

作 z变换 $Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$

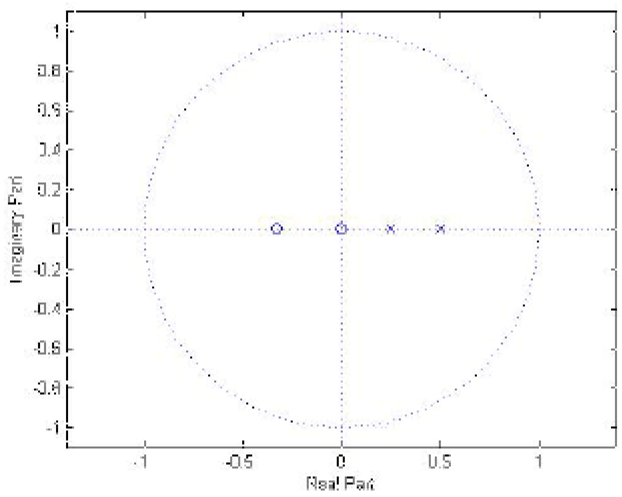
系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z^{2}-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$

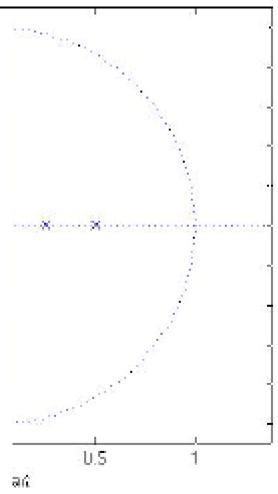
单位样值响应 $h(n)=Z^{-1}[H(z)]=$

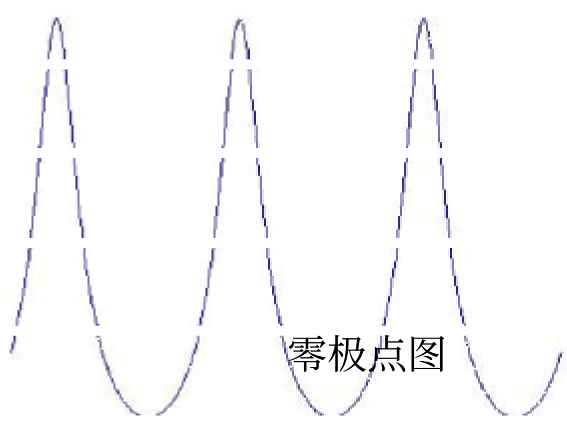
（

零

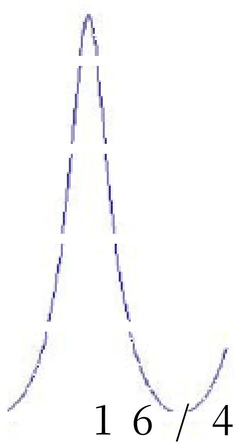
（







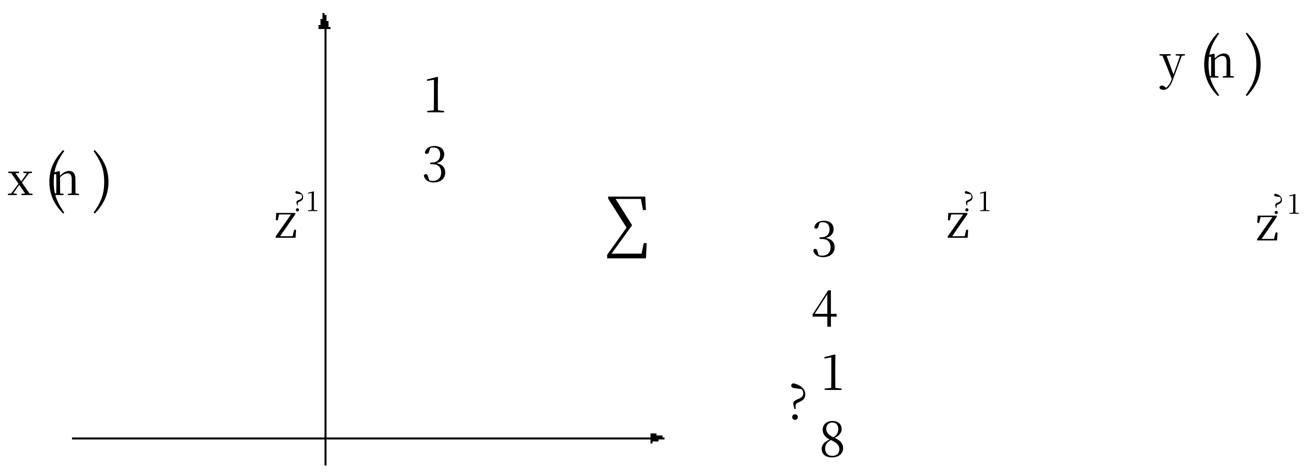
零极点图



?2π ?π 0 π 2π 3π

幅频响应

（



9-2解：设周期序列 $x_p(n)$ 的周期为 N，则：

$$X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

$$X_p^*(k)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n)\right]^*\left[e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*$$

由于 $x_p(n)$ 是实数序列

$$\left[x_p(n)\right]^*=x_p(n)$$

而 $\left[e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

于是 $X_p^*(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

故 $X_p^*(-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=X_p(k)$

9-解题过程：

设 $x_p(n)$ 的周期为 N，则 $X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

$$X_p^*(k)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

变量置换，令 $n=-n$，则

$$X_p^*(k)=\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

由于 $x_p(n)$ 是 n 的偶函数，所以 $x_p(-n)=x_p(n)$

又知 $x_p(n)$ 是以 N 为周期的周期序列，故其在任一周期内的 DFS 应相同，即

$$\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

故 $X_p^*(n)=\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=X_p(n)$

因此 $X_p(k)$ 是实数序列。

又由题 9-2 可知，对实数序列 $x_p(n)$，有 $X_p(k)=X_p^*(-k)$

也即 $X_p^*(k)=X_p(-k)$

因此 $X_p(k)=X_p(-k)$

即 $X_p(k)$ 为 k 的偶函数。

9-7 解题过程：

设 $x_p(n)$ 如图 9-7(a) 所示，由定义有

$$x((-n))_N = x_p(-n)$$

因此，$x((-n))_N$ 序列即 $x_p(n)$ 序列以 $n=0$ 点为轴反转，如解图 9-7(b) 所示。

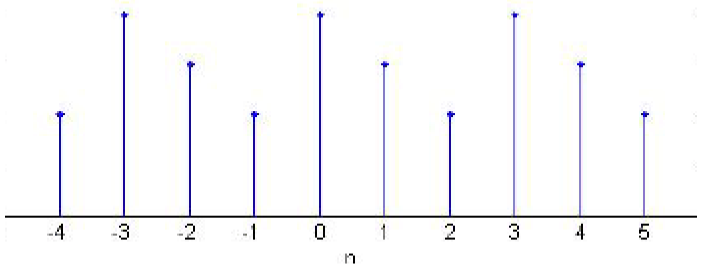


图 9-7(a)

图 9-7(b)

9-8 解题过程：

由定义 $X(k)=\sum_{n=0}^{3} x(n) W^{nk}$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

又有 $W=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$， $N=4$

故 $W^4=W^0$，$W^6=W^2$，$W^9=W^1$ 且 $W^2=-W^0$，$W^3=-W^1$

而 $W^0=1$，$W^1=-j$

所以
$$\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ X(2)\\ X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3\\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6\\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\\ 2+j\\ -5\\ 2-j\end{bmatrix}$$

又 $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}$ 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\ W^0 & W^{-1} & -W^0 & -W^{-1}\\ W^0 & -W^{0} & W^0 & -W^{0}\\ W^0 & -W^{-1} & -W^{0} & W^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ X(2)\\ X(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5\\ 2+j\\ -5\\ 2-j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$$

与原 $x(n)$ 一致。

9 - 解题过程：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[a\,e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right]^n$$

$$=\frac{1-\left[a\,e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right]^N}{1-a\,e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}=\frac{1-a^N}{1-a\,e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}\qquad 0\le k\le N-1$$

9 - 解题过程：如题图 9 - 1 1

$x(n)$

图 9 - 1 1

先由 $x(n)$ 绘出 $x((n))_4$，在据 $x((n))_4$ 绘出 $x((n-2))_4$，得 $x_1(n)$ 如解图 9 - 1 1（a）。

$x_1(n)$

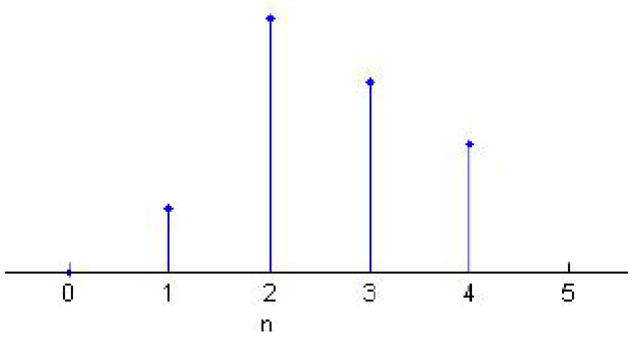


图 9-11（a）

同样，得 $x_2(n)$ 如解图 9-11（b）所示。

$x_2(n)$

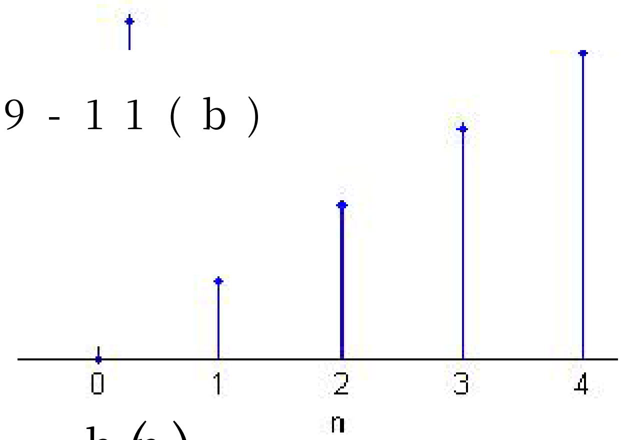
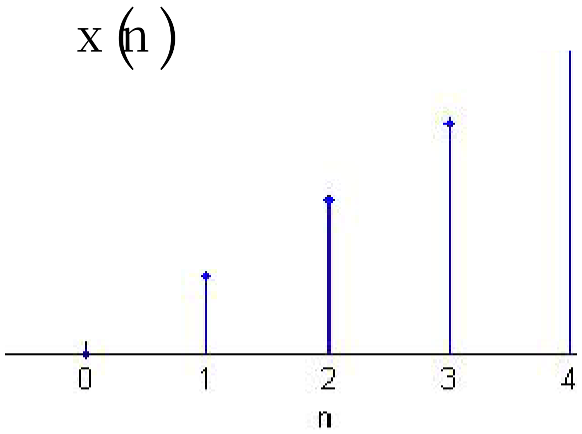


图 9-11（b）

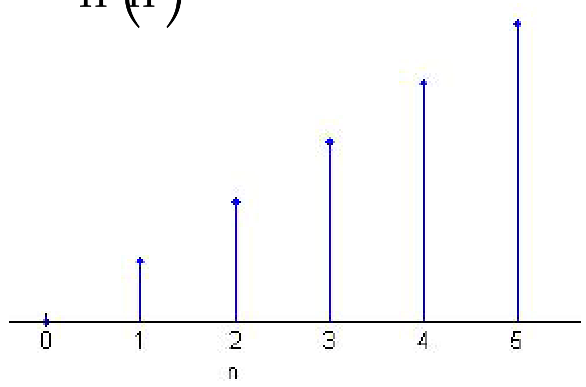
9-12 解题过程：

如题图 9-12

$x(n)$



$h(n)$



题图 9-12

$$x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=0}^{5} h(m)\, x((n-m))_6 R_6(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{5} \delta(m-2)\, x((n-m))_6 R_6(n)$$

$$= x((n-2))_6 R_6(n)$$

其结果如解图 9-12 所示。

$x_1(n)$

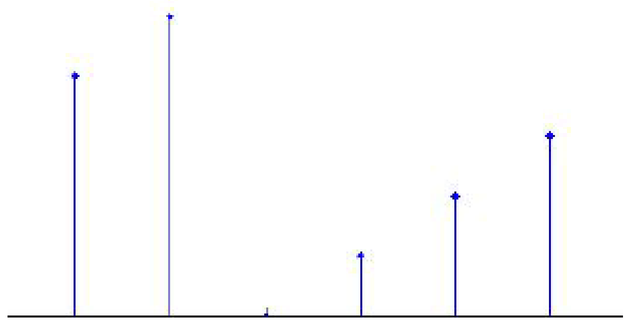


图 9-11(a)

同样，得 $x_2(n)$ 如解图 9-11(b) 所示。

$x_2(n)$

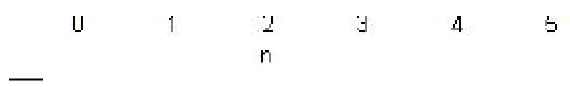
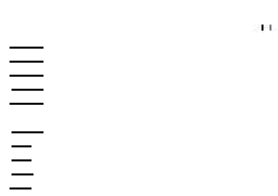


图 9-11(b)

9-12 解题过程：

如题图 9-12

$x(n)$ $h(n)$



题图 9-12

$$x(n) ⊛ h(n) = \sum_{m=0}^{5} h(m) x((n-m))_6 R_6(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{5} \delta(m-2) x((n-m))_6 R_6(n)$$

$$= x((n-2))_6 R_6(n)$$

其结果如解图 9-12 所示。

于是 $DFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk}\right]^*=X^*(n-k)$

因此 $X_1(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]$， $X_2(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]$

9 - 2解题过程：

$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)W^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}W^{nk}=\frac{1-W^{kN}}{1-W^{k}}\quad(k\neq 0)$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}Nk}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=0$$

若 $k=0$，则 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$，故 $X(k)=N\delta(k)$

帕斯瓦尔定理： $\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$ 此题中 $\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$

$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|N\delta(k)\right|^2=N$，故帕斯瓦尔定理成立。

9 - 2解题过程：

由逆变换定义 $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}$

所以 $x(-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{nk}$

将变量 n， k的取值范围都是从 0到 $N-1$据离散傅里叶变换的定义有

$$DFT\left[x(n)\right]=N\,x(-k)R_N(n)$$

9 - 2解题过程：

（1） $Z\left[X(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\quad(z>0)$

（2） $DFT\left[x(n)\right]=N\,x(-k)R_N(n)$

$$DFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk}\right]^*=X^*(n-k)$$

(3) $X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \dfrac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}\left(e^{j\frac{N\omega}{2}}-e^{-j\frac{N\omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$

$$= \frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} = \underbrace{\left|\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|}_{\text{幅度}} \underbrace{e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}+j\theta(\omega)}}_{\text{相位}}$$

由于对 $\dfrac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$ 取绝对值时，分子分母符号可能不同，因而相位特性有一个 $\theta(\omega)$，$\theta(\omega)$ 可能为 0 或 π。

幅度特性曲线如解图 9-24 所示。(设 $N=6$)

N

$\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ π 2π

解图 9-24

9-34 解题过程：

(1) 由于 $f_1 \le 5\,\mathrm{Hz}$，所以 $T_1 = \dfrac{1}{f_1} \ge \dfrac{1}{5} = 0.2\,\mathrm{s}$

(2) 由于 $T_s \le \dfrac{1}{2f_h}$，而最高频率 $f_h \le 1.25\,\mathrm{kHz}$

故 $T_s \le \dfrac{1}{2f_h} = \dfrac{1}{2\times 1.25\times 10^3} = 0.4\,\mathrm{ms}$，取 $T_s = 0.4\,\mathrm{ms}$

(3) 由于 $N = \dfrac{T_1}{T_s}$，故 $N \ge \dfrac{0.2}{0.4\times 10^{-3}} = 500$，一般要求 N 为 2 的整数幂，故取 $N = 2^9 = 512$

所以 $T_1 = NT_s = 512\times 0.4\times 10^{-3} = 0.2048$